



# Analyse fine du mécanisme d'interaction dans les structures souples assemblées par collage

Pascal Coudor

## ► To cite this version:

Pascal Coudor. Analyse fine du mécanisme d'interaction dans les structures souples assemblées par collage. Mécanique des solides [physics.class-ph]. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2009. Français. NNT : 2009CLF21916 . tel-00725912

**HAL Id: tel-00725912**

**<https://theses.hal.science/tel-00725912>**

Submitted on 28 Aug 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ BLAISE PASCAL - CLERMONT II  
Ecole Doctorale  
Sciences Pour l'Ingénieur de Clermont-Ferrand

# Thèse

Présentée par

**Pascal COUDOR**

pour obtenir le grade de  
Docteur d'Université  
Spécialité : Mécanique du solide

## **Analyse fine du mécanisme d'interaction dans les structures souples assemblées par collage**

Soutenue publiquement le 17 Mars 2009 devant le jury :

D. BIGAUD	Rapporteur
J.Y. COGNARD	Rapporteur
M. POTIER-FERRY	Examineur
J.F. DESTREBECQ	Directeur de thèse
A. BÉAKOU	Directeur de thèse



# Table des matières

Table des matières	v
Table des figures	x
Table des tableaux	xii
Remerciements	xiii
Résumé	xv
Abstract	xvii
Introduction générale	1
<b>I Etat de l’art</b>	<b>5</b>
<b>1 Généralités sur le collage</b>	<b>7</b>
1.1 Définitions . . . . .	8
1.2 Les matériaux polymères . . . . .	8
1.3 Les adhésifs époxydes . . . . .	10
1.4 Notions d’interphase . . . . .	10
1.5 Mécanisme du collage . . . . .	11
1.6 Avantages et limites du collage . . . . .	12
1.7 Propriétés mécaniques d’adhésifs époxydes . . . . .	16
1.7.1 Aperçu général sur les caractéristiques mécaniques . . . . .	16
1.7.2 Hexcel Redux <sup>®</sup> 312 L . . . . .	16
<b>2 Comportement mécanique : Interaction &amp; Ancrage</b>	<b>19</b>
2.1 Historique des approches analytiques . . . . .	20
2.2 Rappel des approches classiques simplifiées . . . . .	22
2.2.1 Modèle simplifié de joint à simple recouvrement . . . . .	22
2.2.2 Cas d’un composant renforcé sous chargement uniaxial . . . . .	23
2.3 Limites des solutions classiques . . . . .	27
2.4 Rupture adhésive & rupture cohésive . . . . .	28
2.4.1 Critères de ruptures . . . . .	28
2.4.2 Applications traitées dans la littérature . . . . .	32

<b>3</b>	<b>Le flambage</b>	<b>35</b>
3.1	Principes généraux . . . . .	36
3.1.1	Etats d'équilibre stable et instable . . . . .	36
3.1.2	Energie potentielle minimale . . . . .	36
3.1.3	Bifurcation d'équilibre . . . . .	37
3.1.4	Influence de défauts . . . . .	39
3.2	Flambage des poutres . . . . .	39
3.2.1	La théorie d'Euler . . . . .	40
3.2.2	Généralisation de la théorie d'Euler . . . . .	41
3.2.3	Théorie de Timoshenko . . . . .	42
<b>II</b>	<b>Développement d'un modèle d'interaction étendu</b>	<b>47</b>
<b>4</b>	<b>Formulation générale du modèle d'interaction</b>	<b>49</b>
4.1	Présentation du modèle et mise en équations . . . . .	50
4.1.1	Rappel sur les tenseurs de contraintes dans l'hypothèse des grands déplacements . . . . .	50
4.1.2	Hypothèses cinématiques . . . . .	51
4.1.3	Les champs de déformation . . . . .	52
4.1.4	Les champs de contrainte . . . . .	53
4.1.5	Les forces et moments résultants . . . . .	54
4.1.6	L'équilibre statique local . . . . .	54
4.1.7	La mise en équations du problème . . . . .	55
4.2	Résolution dans le cas général . . . . .	56
4.2.1	Le système différentiel . . . . .	56
4.2.2	Solution complète . . . . .	57
4.3	Solution simplifiée . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Identification du modèle pour des configurations particulières</b>	<b>63</b>
5.1	Cas du joint à simple recouvrement . . . . .	64
5.2	Cas d'une poutre renforcée en flexion trois points . . . . .	68
5.3	Cas d'une poutre renforcée en flexion/compression . . . . .	71
5.3.1	Sous charge répartie . . . . .	76
5.3.2	Sous chargement thermique . . . . .	77
5.3.3	Sous charge de compression . . . . .	80
<b>6</b>	<b>Influence de diverses hypothèses simplificatrices</b>	<b>87</b>
6.1	Cas d'une poutre renforcée sous charge répartie . . . . .	88
6.1.1	Influence des effets de courbure . . . . .	88
6.1.2	Influence du couplage des contraintes de cisaillement et de pelage . . . . .	90
6.2	Cas d'une poutre renforcée comprimée . . . . .	91
6.2.1	Influence des effets de courbure . . . . .	91
6.2.2	Influence du couplage des contraintes de cisaillement et de pelage . . . . .	92
6.3	Conclusion . . . . .	95

<b>III</b>	<b>Validation du modèle</b>	<b>97</b>
<b>7</b>	<b>Validation par comparaison avec des modèles numériques</b>	<b>99</b>
7.1	Cas du joint à simple recouvrement . . . . .	100
7.1.1	Présentation du modèle . . . . .	100
7.1.2	Modélisation . . . . .	101
7.1.3	Comparaison des résultats numériques et analytiques . . . . .	102
7.2	Cas d'une poutre renforcée . . . . .	105
7.2.1	Présentation du modèle . . . . .	105
7.2.2	Modélisation . . . . .	107
7.2.3	Cas d'une poutre renforcée en flexion trois points . . . . .	108
7.2.4	Cas d'une poutre renforcée sous charge répartie . . . . .	109
7.2.5	Cas d'une poutre renforcée sous chargement thermique . . . . .	112
7.2.6	Cas d'une poutre renforcée comprimée . . . . .	115
7.3	Conclusion . . . . .	117
<b>8</b>	<b>Validation par comparaison avec des expérimentations</b>	<b>119</b>
8.1	Les éprouvettes . . . . .	120
8.1.1	Description des éprouvettes et des moyens de mesure . . . . .	120
8.1.2	Réalisation des éprouvettes . . . . .	120
8.1.3	Méthode de comparaison utilisée . . . . .	121
8.2	Essais en flexion trois points . . . . .	122
8.3	Essais en flambage par compression . . . . .	125
8.3.1	Comportement global . . . . .	125
8.3.2	Déformations en extrémité du renfort . . . . .	128
8.4	Conclusion . . . . .	128
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>135</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>144</b>
	<b>Annexes</b>	<b>147</b>
<b>A</b>	<b>Propriétés mécaniques d'adhésif époxydes</b>	<b>147</b>
A.1	Araldite® 2015 . . . . .	147
A.2	Cytec FM® 73 . . . . .	147
<b>B</b>	<b>Simplification en zone d'extrémité</b>	<b>151</b>
<b>C</b>	<b>Flambage : Méthode énergétique</b>	<b>153</b>
<b>D</b>	<b>Jauges d'extensométrie</b>	<b>155</b>



# Table des figures

1	Exemple de panneau raidi flambé . . . . .	1
1.1	Structures moléculaires des polymères . . . . .	9
1.2	Les différents états d'un polymère . . . . .	9
1.3	Répartition des causes de défaillance d'un renfort . . . . .	12
1.4	Mouillage et énergie de surface . . . . .	13
1.5	Avantages du collage par rapport aux solutions traditionnelles . . . . .	14
1.6	Fixation d'un raidisseur . . . . .	15
1.7	Règles de conception des assemblages collés . . . . .	15
1.8	Cycle de mise en oeuvre de la Redux <sup>®</sup> 312 L . . . . .	17
2.1	Configurations de joints étudiées dans la littérature . . . . .	20
2.2	Modèle bidimensionnel : Joint à simple recouvrement . . . . .	22
2.3	Modélisation classique d'un renforcement par collage . . . . .	23
2.4	Représentation de la déformation de cisaillement dans l'adhésif . . . . .	24
2.5	Equilibre statique local du renfort . . . . .	24
2.6	Comparaison de la formule générale du cisaillement avec la formule en zone d'extrémité . . . . .	26
2.7	Comparaison de la solution analytique avec les résultats éléments finis . . . . .	27
2.8	Impact de la condition de bord libre sur la contrainte de cisaillement . . . . .	29
2.9	Modes de rupture dans un joint collé . . . . .	29
2.10	Localisation des 2 points les plus critiques d'un joint à simple recouvrement . . . . .	30
2.11	Critères de plasticité représentés dans l'espace des contraintes principales . . . . .	31
3.1	Les trois états d'équilibre . . . . .	36
3.2	Aspect relatif de l'équilibre . . . . .	37
3.3	Barre articulée soumise à un effort de compression . . . . .	37
3.4	Branches d'équilibre de la barre rigide articulée . . . . .	38
3.5	Solutions stables de l'équilibre . . . . .	39
3.6	Effets de défauts sur le comportement de bifurcation . . . . .	40
3.7	Présentation de la poutre d'Euler . . . . .	40
3.8	Les déformées des 3 premiers modes de flambage d'une poutre bi-articulée . . . . .	41
3.9	Quelques configurations avec la valeur de $K$ correspondante pour le calcul de la charge critique . . . . .	42
3.10	Poutre bi-articulée comprimée avec un effort transversal centré . . . . .	42
4.1	Notations utilisées au sein de l'assemblage collé . . . . .	51



4.2	Equilibre local de l'élément $dx$ . . . . .	54
5.1	Cas du joint à simple recouvrement . . . . .	64
5.2	Distance de diffusion de l'effort (joint à simple recouvrement) . . . . .	67
5.3	Cas d'une poutre renforcée en flexion trois points . . . . .	68
5.4	Décomposition de la contrainte de cisaillement (poutre renforcée en flexion trois points) . . . . .	72
5.5	Décomposition de la contrainte de pelage (poutre renforcée en flexion trois points) . . . . .	73
5.6	Cas d'une poutre renforcée sous divers modes de flexion/compression . . . .	74
5.7	Distance de diffusion de l'effort (poutre renforcée) . . . . .	76
5.8	Décomposition de la contrainte de cisaillement (poutre renforcée sous charge répartie) . . . . .	78
5.9	Décomposition de la contrainte de pelage dans le cas (poutre renforcée sous charge répartie) . . . . .	79
5.10	Influence de la zone d'interaction sur le comportement global (poutre renforcée comprimée) . . . . .	82
5.11	Influence de la zone d'interaction sur le comportement global pour $\delta = 0.6$ (poutre renforcée comprimée) . . . . .	82
5.12	Décomposition de la contrainte de cisaillement (poutre renforcée comprimée) .	84
5.13	Décomposition de la contrainte de pelage (poutre renforcée comprimée) . .	85
6.1	Poutre renforcée sous charge répartie - Influence des effets de courbure sur la contrainte de pelage ( $\delta = 1$ ) . . . . .	89
6.2	Poutre renforcée sous charge répartie - Influence des effets de courbure sur la contrainte de pelage ( $\delta = 0.6$ ) . . . . .	89
6.3	Poutre renforcée sous charge répartie - Influence des effets de courbure sur la contrainte de cisaillement ( $\delta = 1$ ) . . . . .	89
6.4	Poutre renforcée sous charge répartie - Influence des effets de courbure sur la contrainte de cisaillement ( $\delta = 0.6$ ) . . . . .	89
6.5	Poutre renforcée sous charge répartie - Influence du couplage sur la contrainte de pelage ( $\delta = 1$ ) . . . . .	90
6.6	Poutre renforcée sous charge répartie - Influence du couplage sur la contrainte de pelage ( $\delta = 0.6$ ) . . . . .	90
6.7	Poutre renforcée sous charge répartie - Influence du couplage sur la contrainte de cisaillement ( $\delta = 1$ ) . . . . .	91
6.8	Poutre renforcée sous charge répartie - Influence du couplage sur la contrainte de cisaillement ( $\delta = 0.6$ ) . . . . .	91
6.9	Poutre renforcée comprimée - Influence des effets de courbure sur la contrainte de pelage ( $\delta = 1$ ) . . . . .	92
6.10	Poutre renforcée comprimée - Influence des effets de courbure sur la contrainte de pelage ( $\delta = 0.6$ ) . . . . .	92
6.11	Poutre renforcée comprimée - Influence des effets de courbure sur la contrainte de cisaillement ( $\delta = 1$ ) . . . . .	93
6.12	Poutre renforcée comprimée - Influence des effets de courbure sur la contrainte de cisaillement ( $\delta = 0.6$ ) . . . . .	93

6.13	Poutre renforcée comprimée - Influence du couplage sur la contrainte de pelage ( $\delta = 1$ ) . . . . .	94
6.14	Poutre renforcée comprimée - Influence du couplage sur la contrainte de pelage ( $\delta = 0.6$ ) . . . . .	94
6.15	Poutre renforcée comprimée - Influence du couplage sur la contrainte de cisaillement ( $\delta = 1$ ) . . . . .	94
6.16	Poutre renforcée comprimée - Influence du couplage sur la contrainte de cisaillement ( $\delta = 0.6$ ) . . . . .	94
7.1	Cas du joint à simple recouvrement . . . . .	100
7.2	Joint à simple recouvrement - Raffinement du maillage à proximité de l'adhésif . . . . .	102
7.3	Joint à simple recouvrement - Convergence de maillage pour $\delta = 0.6$ . . . .	102
7.4	Joint à simple recouvrement - Contrainte de cisaillement le long de la zone de recouvrement . . . . .	103
7.5	Joint à simple recouvrement - Contrainte de cisaillement maximale . . . . .	104
7.6	Joint à simple recouvrement - Contrainte de pelage maximale . . . . .	104
7.7	Joint à simple recouvrement - Contrainte de pelage le long de la zone de recouvrement . . . . .	104
7.8	Joint à simple recouvrement - Contrainte équivalente de Gali & Ishaï . . . .	105
7.9	Cas d'une poutre renforcée . . . . .	106
7.10	Cas d'une poutre renforcée en flexion trois points . . . . .	106
7.11	Cas d'une poutre renforcée sous charge répartie . . . . .	106
7.12	Cas d'une poutre renforcée comprimée . . . . .	106
7.13	Poutre renforcée - Raffinement du maillage à proximité de l'adhésif . . . .	107
7.14	Poutre renforcée - Convergence de maillage pour $\delta = 0.6$ . . . . .	107
7.15	Poutre renforcée en flexion trois points - Contrainte de cisaillement pour $\delta = 0.8$ . . . . .	109
7.16	Poutre renforcée en flexion trois points - Contrainte de cisaillement maximale . . . . .	110
7.17	Poutre renforcée en flexion trois points - Contrainte de pelage maximale . .	110
7.18	Poutre renforcée en flexion trois points - Contrainte de pelage pour $\delta = 0.8$	111
7.19	Poutre renforcée sous charge répartie - Contrainte de cisaillement le long de la zone de recouvrement . . . . .	113
7.20	Poutre renforcée sous charge répartie - Contrainte de cisaillement maximale . . . . .	113
7.21	Poutre renforcée sous charge répartie - Contrainte de pelage maximale . . .	113
7.22	Poutre renforcée sous charge répartie - Contrainte de pelage le long de la zone de recouvrement . . . . .	114
7.23	Poutre renforcée sous charge répartie - Contrainte équivalente de Gali & Ishaï . . . . .	114
7.24	Poutre renforcée sous chargement thermique - Contrainte de cisaillement pour $\delta = 0.8$ . . . . .	115
7.25	Poutre renforcée sous chargement thermique - Contrainte de pelage pour $\delta = 0.8$ . . . . .	116

7.26	Poutre renforcée sous chargement thermique - Contrainte de cisaillement maximale . . . . .	116
7.27	Poutre renforcée sous chargement thermique - Contrainte de pelage maximale . . . . .	116
7.28	Poutre renforcée comprimée - Contrainte de cisaillement le long de la zone de recouvrement . . . . .	117
7.29	Poutre renforcée comprimée - Contrainte de cisaillement maximale . . . . .	118
7.30	Poutre renforcée comprimée - Contrainte de pelage maximale . . . . .	118
7.31	Poutre renforcée comprimée - Contrainte de pelage le long de la zone de recouvrement . . . . .	118
8.1	Forme des éprouvettes utilisées pour valider le modèle analytique . . . . .	120
8.2	Schéma du dispositif d'essai en flexion trois points . . . . .	123
8.3	Déformation longitudinale en extrémité au dessus du renfort pour l'éprouvette 1 soumise à de la flexion 3 points ( $P=45N$ ) . . . . .	124
8.4	Déformation longitudinale en extrémité au dessus du renfort pour l'éprouvette 3 soumise à de la flexion 3 points ( $P=45N$ ) . . . . .	125
8.5	Schéma expérimental de l'essai en compression excentrée . . . . .	126
8.6	Excentricité supplémentaire lors du chargement en flambage . . . . .	126
8.7	Flèches expérimentales et analytiques dans le cas du flambage pour différents niveaux de chargement . . . . .	127
8.8	Déformations normales expérimentales et analytiques dans le cas du flambage pour différents niveaux de chargement . . . . .	128
8.9	Courbures expérimentales et analytiques dans le cas du flambage pour différents niveaux de chargement . . . . .	128
8.10	Déformations longitudinales au dessus du renfort obtenues expérimentalement et analytiquement dans le cas du flambage pour $N = 700\text{ N}$ . . . . .	129
8.11	Déformations longitudinales au dessus du renfort obtenues expérimentalement et analytiquement dans le cas du flambage pour $N = 800\text{ N}$ . . . . .	129
8.12	Déformations longitudinales au dessus du renfort obtenues expérimentalement et analytiquement dans le cas du flambage pour $N = 900\text{ N}$ . . . . .	130
8.13	Déformations longitudinales au dessus du renfort obtenues expérimentalement et analytiquement dans le cas du flambage pour $N = 1000\text{ N}$ . . . . .	130
A.1	Courbe Ramberg-Osgood de la FM <sup>®</sup> 73 . . . . .	149
A.2	Influence de la vitesse de sollicitation sur la courbe contrainte/déformation de la FM <sup>®</sup> 73 . . . . .	149
C.1	Poutre simplement appuyée en compression . . . . .	153

# Liste des tableaux

1.1	Propriétés des polymères . . . . .	10
1.2	Résistances mécaniques des adhésifs structuraux . . . . .	11
1.3	Résistance au cisaillement - Influence des adhérents . . . . .	11
1.4	Exemples d'énergie de surface . . . . .	13
1.5	Propriétés mécaniques des adhésifs époxydes . . . . .	16
1.6	Propriétés mécaniques de la Redux <sup>®</sup> 312 L . . . . .	17
2.1	Synthèse des approches disponibles dans la littérature concernant les joints à simple recouvrement [33]. . . . .	21
2.2	Propriétés matériaux . . . . .	26
3.1	Flèche d'une poutre comprimée suivant son axe longitudinal avec chargement transverse . . . . .	45
5.1	Données numériques utilisées dans le cas d'une poutre renforcée. . . . .	71
6.1	Données numériques utilisées dans le cas d'une poutre renforcée. . . . .	88
6.2	Comparaison des pics de contraintes de cisaillement et de pelage en flexion sous charge répartie pour diverses valeurs de $\delta$ (Modèle complet/Modèle sans effet de courbure). . . . .	90
6.3	Comparaison des pics de contraintes de cisaillement et de pelage en flexion sous charge répartie pour diverses valeurs de $\delta$ (Modèle complet/Modèle découplé). . . . .	91
6.4	Comparaison des pics de contraintes de cisaillement et de pelage en flambage pour diverses valeurs de $\delta$ (Modèle complet/Modèle sans effet de courbure). . . . .	93
6.5	Comparaison des pics de contraintes de cisaillement et de pelage en flambage pour diverses valeurs de $\delta$ (Modèle complet/Modèle découplé). . . . .	95
6.6	Conclusion sur l'influence des hypothèses simplificatrices rencontrées dans la littérature sur les contraintes de cisaillement et de pelage. . . . .	95
7.1	Données numériques utilisées dans le cas du joint à simple recouvrement. . . . .	101
7.2	Données numériques utilisées dans le cas d'une poutre renforcée. . . . .	106
8.1	Dimensions mesurées sur les éprouvettes utilisées. . . . .	121
8.2	Propriétés matériaux des différents constituants des éprouvettes. . . . .	121
8.3	Epaisseur de l'adhésif le long de zone de recouvrement. . . . .	122
8.4	Flèches expérimentales et analytiques dans le cas de la flexion trois points. . . . .	123

A.1	Propriétés matériaux de l'Araldite <sup>®</sup> 2015 à 23°C . . . . .	147
A.2	Exemple d'utilisation de la Cytec FM <sup>®</sup> 73 . . . . .	148
A.3	Propriétés matériaux de la FM <sup>®</sup> 73 . . . . .	148

# Remerciements

Je tiens à remercier les membres de mon jury de thèse et notamment Monsieur Michel Potier-Ferry, professeur à l'Université Paul Verlaine de Metz et président du jury. Je remercie également Monsieur David Bigaud, Professeur à l'Université d'Angers ainsi que Monsieur Jean-Yves Cognard, Professeur à l'ENSIETA de Brest, de m'avoir fait l'honneur de rapporter cette thèse.

Je remercie mes directeurs de thèse Monsieur Alexis Béakou, professeur à l'IFMA d'Aubière et Monsieur Jean-François Destrebecq, professeur à l'Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand. Merci pour votre implication, et surtout les conseils qui m'ont permis d'avancer tout au long de ma thèse.

Enfin, je remercie tous les chercheurs, enseignants et membres du personnel du LaMI et de l'IFMA pour leur amitié et leur aide pendant ces trois années de thèse.



# Résumé

Ce document présente une amélioration des approches existantes pour la détermination des contraintes qui résultent du mécanisme d'interaction dans les assemblages collés soumis à de la flexion ou du flambage. Pour ce faire, une solution analytique a été développée pour calculer les contraintes de cisaillement et de pelage au sein de l'adhésif. La méthode est basée sur une description précise des équations cinématiques au sein d'un composant renforcé. Les effets du second ordre dus à la flexion de l'assemblage sont pris en compte par le biais de la courbure. La déformation transverse au sein de l'adhésif due à la différence de courbure des adhérents est considérée. Les équations qui gouvernent le mécanisme d'interaction sont établies sous la forme d'un système différentiel couplé, dont les inconnues sont la contrainte de cisaillement et la contrainte de pelage dans l'adhésif. L'interaction entre les deux contraintes est prise en compte lors de la résolution. La solution générale pour ce système est donnée.

Le modèle analytique est ensuite appliqué à des configurations particulières (joint à simple recouvrement et poutre renforcée). La structure renforcée est soumise à différents cas de chargement : flexion, chargement thermique et flambage. Les modèles théoriques sont comparés à des simulations numériques. Les résultats sont concordants, spécialement dans la zone d'ancrage, où les contraintes de cisaillement et de pelage sont maximales. Les différents cas étudiés permettent de valider le modèle analytique pour déterminer précisément les contraintes au sein du joint d'adhésif. La présente solution permet d'améliorer également la précision des modèles existants dans les cas extrêmes jusqu'à 30% pour la contrainte de cisaillement et 80% pour la contrainte de pelage suivant les configurations étudiées.

Les résultats théoriques ont ensuite été confrontés à des données expérimentales obtenues en configuration de poutres renforcées testées en flexion et flambage par compression. Ces comparaisons ont permis de valider la pertinence des hypothèses sur lesquelles le modèle analytique est construit. Dans le cas du flambage, une forte sensibilité des résultats expérimentaux à la variation des paramètres d'essai a été observée. Une nouvelles campagne visant à mieux contrôler ces paramètres constitue un des prolongements possibles à cette thèse.





# Abstract

An improved method is presented for the analysis of the shear and peel stresses in adhesively-bonded joints in structures subjected to bending and buckling. The method is based on a precise description of the kinematics equations in a beam cross-section. Second order effects due to the slenderness of the member as well as transverse deformation in the adhesive joint due to differential curvature between the two adherends are taken into account. Governing equations for the interfacial stresses are established in the form of two coupled differential equations in terms of the shear and peel stresses in the adhesive joint. This interaction is taken into account. A general solution for these two equations is proposed, which yields two fully coupled closed form equations for the stresses. These general equations may be adapted to any particular configuration by means of appropriate boundary conditions.

Calculations are worked out for several exemplaries such as single lap and structures reinforcement. The reinforced structure is subjected to different kinds of loads : bending and buckling. The theoretical results are found to be in good agreement with reference values obtained by means of a FEM analysis, especially in the anchorage zones where the interfacial stresses reach their critical values. It is concluded that the closed form solution presented in the document is suitable for a precise estimation of the interfacial stresses in bonded structural members subjected to buckling. It leads to an improvement of existing models (up to 30% percent for the shear stress and up to 80% for the peel stress, depending on the configurations).

Experimentations on a reinforced structure have been conducted. Concerning classical loadings such as bending, they show that the hypotheses which the closed form solution is drawn from, lead to an accurate model. In the case of buckling, small variations of the parameters modify greatly the experimental results. More experimentations have to be realized in order to study more accurately the behaviour under buckling.



# Introduction générale

Les progrès en terme de performance des matériaux et de tolérance aux dommages permettent une avancée dans le domaine des assemblages. Ainsi, dans les panneaux raidis (composants de base des structures navales ou aéronautiques), les liaisons entre panneaux et renforts doivent transmettre des efforts importants. Ces panneaux sont généralement assemblés par soudage ou par rivetage. Le principal inconvénient de ces méthodes réside dans le champ singulier de contraintes qui apparaît dans les liaisons. Les récents progrès dans le domaine des adhésifs permet d'envisager une liaison par collage afin d'éviter les concentrations de contrainte. Traditionnellement utilisée pour le renforcement, cette technologie trouve maintenant des applications pour l'assemblage de composants structuraux. La technique d'assemblage par collage présente plusieurs avantages : usinage limité, préservation des propriétés mécaniques des composants, faible sensibilité à la fatigue...

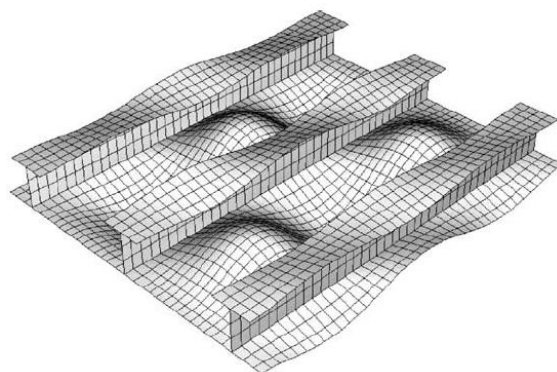


FIGURE 1 – Exemple de panneau raidi flambé.

Bien souvent, la configuration de chargement de ces panneaux génère du flambage local (Cf. figure 1). Il a été montré qu'un composant raidi assemblé par collage présente une charge critique de flambage proche de celle de la structure équivalente soudée ou rivetée [31]. Ceci suppose cependant que le joint collé soit capable de supporter les contraintes qui résultent du mécanisme d'interaction entre le renfort, le joint et le support au cours du processus de flambage. Ce phénomène est également observé dans le cas d'une sollicitation de flexion. La plupart des défaillances des liaisons collées sont dues à la rupture du joint de colle. En effet, en extrémité, un pic de contrainte de cisaillement et de pelage apparaît au sein de l'adhésif. La littérature abonde de modèles analytiques unidirectionnels simples en

flexion permettant de définir la contrainte de cisaillement et parfois la contrainte de pelage au sein de l'adhésif [106]. A partir de ces modèles, un critère spécifique aux adhésifs peut être appliqué dans le but d'évaluer la résistance du joint de colle. Différents travaux ont été également réalisés par une approche numérique. Ces travaux permettent notamment d'étudier la répartition de contrainte au sein de l'adhésif mais également l'influence de la forme des extrémités libres des substrats sur les pics de contraintes [28, 29]. Bien souvent, pour obtenir un maillage conforme, le rapport des dimensions entre l'épaisseur de l'adhésif et la longueur de recouvrement conduit à un nombre d'éléments très important. Il en résulte un temps de calcul très important.

L'objectif principal de ma thèse est de proposer un modèle d'interaction étendu pour les structures souples assemblées par collage. Ce modèle permettra de définir la distribution des contraintes au sein de l'adhésif. Les structures étudiées seront soumises à de la flexion et du flambage par compression. L'approche sera analytique puis validée numériquement et expérimentalement.

Dans ce contexte, ce document se propose d'affiner la précision des modèles existants. De plus, la méthode est suffisamment générale pour permettre l'application à n'importe quel type de jonction collée soumise à de la flexion ou du flambage. Pour ce faire, une approche globale/locale est développée pour l'analyse des mécanismes d'interaction dans un composant multimatériaux unidimensionnel en phase de flexion ou de flambage. Dans un premier temps, la structure est homogénéisée afin d'analyser son comportement global dans le cadre classique de la théorie des poutres. Puis une méthode de localisation permet la détermination des contraintes en tout point à partir de la courbure de l'élément fléchi, notamment des contraintes normale transverse et de cisaillement dans le joint de colle. Les déformations transverses du joint ainsi que les effets de couplage entre les contraintes de cisaillement et les contraintes de pelage sont pris en compte. De plus, pour être appliqué au cas du flambage, les effets de courbure sont intégrés dans le modèle. La méthode proposée est très générale et ne dépend pas des conditions aux limites. Ces dernières n'interviennent qu'à la fin de la résolution pour identifier des constantes d'intégration des solutions des équations différentielles rendues homogènes. Ce modèle est appliqué à diverses configurations types (joint à simple recouvrement, poutre renforcée simplement appuyée sous divers modes de chargement). L'influence du couplage et des effets de courbure est étudiée sur des exemples simples afin de quantifier l'apport de ce travail de thèse. Ces développements sont présentés dans les chapitres 4, 5 et 6 qui constituent la 2<sup>ème</sup> partie de ce mémoire, la première partie décrivant l'état de l'art. La troisième partie du document présente la validation du modèle. Elle est composée des chapitres 7 et 8.

Dans le chapitre 7, la validité de la démarche est examinée par comparaison à des simulations par éléments finis. L'objectif est la détermination des états bidimensionnels de contrainte dans le joint dont la connaissance est nécessaire pour l'évaluation du risque de rupture. Diverses configurations sont étudiées sous divers chargements mécaniques et thermiques. Des modèles éléments finis sont réalisés sous ANSYS. Chacun des modèles numériques est basé sur des hypothèses aussi proches que possible des hypothèses du modèle d'interaction analytique. Cela permet dans un premier temps de discuter de la validité de la solution proposée. Les résultats du modèle développé dans le cadre de cette thèse sont également comparés à des résultats disponibles dans littérature afin de mettre

---

en évidence l'apport relativement aux modèles existants.

Le huitième et dernier chapitre de ce mémoire est de nature expérimentale. Il permet de discuter des hypothèses sur lesquelles est basé le modèle d'interaction développé dans le cadre de cette thèse. Une méthode de mesure des déformations via une chaînette de jauges est utilisée. La configuration étudiée correspond au cas d'une poutre renforcée. Dans un premier temps, l'éprouvette est soumise à de la flexion trois points. Les déformations sont mesurées et comparées au modèle d'interaction développé dans ce document. Dans un second temps, l'éprouvette est comprimée. L'excentricité due au renfort introduit un défaut d'alignement du chargement. Ce défaut génère le flambage de l'éprouvette. Les déformations sont mesurées et comparées au modèle analytique.

L'ensemble de ce travail permet de conclure que l'amélioration des approches existantes affine la détermination des contraintes de cisaillement et de pelage au sein du joint d'adhésif. Cette amélioration peut atteindre dans les cas extrêmes 30% pour la contrainte de cisaillement et 80% pour la contrainte de pelage suivant les configurations étudiées. Quelle que soit la configuration testée, les résultats numériques et analytiques sont concordants, spécialement en zone d'extrémité où apparaît le pic de contrainte. Ce modèle d'interaction permet de définir précisément la distribution de contrainte au sein de l'adhésif. Il donne ainsi la possibilité de dimensionner un assemblage collé en ajustant les paramètres tels que le ratio de renforcement et l'épaisseur de l'adhésif.



Première partie

Etat de l'art





# Chapitre 1

## Généralités sur le collage

---

1.1	Définitions . . . . .	8
1.2	Les matériaux polymères . . . . .	8
1.3	Les adhésifs époxydes . . . . .	10
1.4	Notions d'interphase . . . . .	10
1.5	Mécanisme du collage . . . . .	11
1.6	Avantages et limites du collage . . . . .	12
1.7	Propriétés mécaniques d'adhésifs époxydes . . . . .	16
1.7.1	Aperçu général sur les caractéristiques mécaniques . . . . .	16
1.7.2	Hexcel Redux <sup>®</sup> 312 L . . . . .	16

---

Cette partie présente les principes généraux relatifs au collage et introduit les notions essentielles permettant de comprendre les problématiques liées à l'utilisation d'adhésifs.

## 1.1 Définitions

L'AFNOR donne les définitions suivantes [4] :

- Le collage est un assemblage d'objets au moyen d'un adhésif. C'est un procédé physico-chimique.
- L'adhésif est une substance non métallique capable d'unir des matériaux par collage des surfaces (adhésion), la jonction ayant une résistance interne adéquate (cohésion).

Le collage consiste ainsi en l'adhésion de deux parties (adhérents ou substrats) par l'intermédiaire d'un troisième corps (adhésif), qui est le plus souvent un matériau polymère [94, 62]. Cet adhésif est chargé d'assurer la transmission des efforts. Il est nécessaire d'obtenir un niveau d'adhésion satisfaisant entre adhérents et adhésif afin que l'assemblage soit performant et durable.

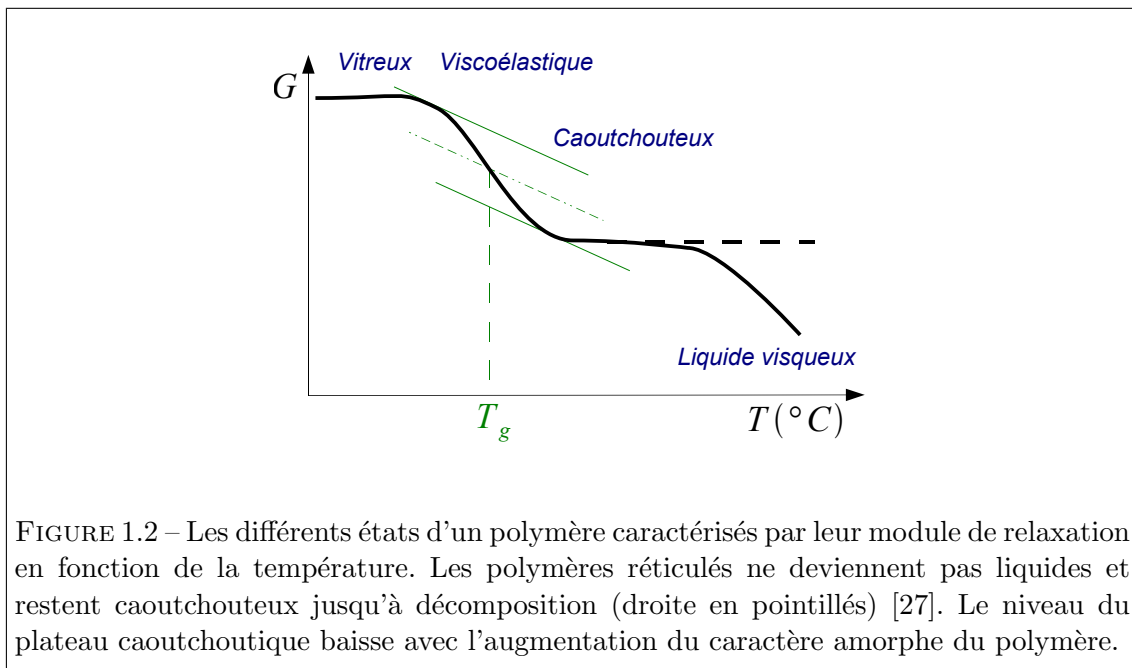
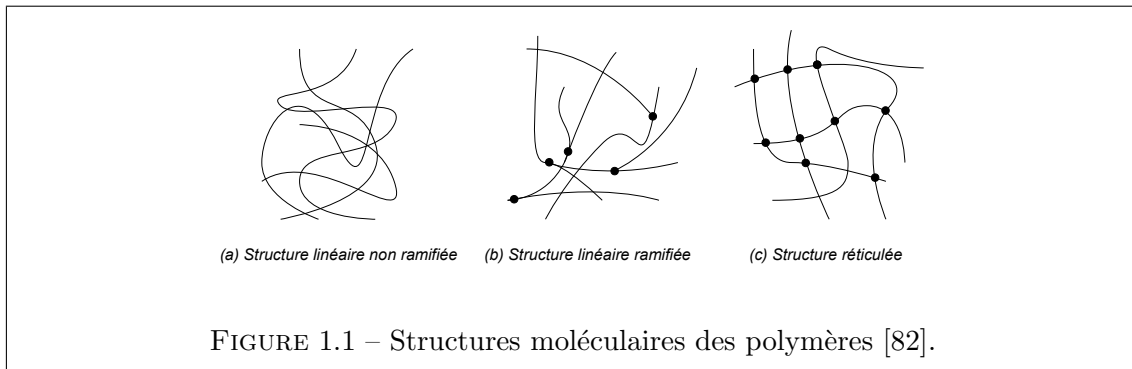
Depuis plus de cinquante ans, les adhésifs sont utilisés en aéronautique pour le fuselage et les ailes [59, 35, 90]. Ils sont aussi utilisés pour le renforcement de structures navales [48] et dans le génie civil [75]. C'est à cette époque qu'est apparue la notion de collage structural. Ce collage est une jonction capable, en tant que partie intégrante d'une structure, de présenter un niveau déterminé de résistance lorsqu'elle est soumise à une combinaison de contraintes pendant une durée spécifiée. La combinaison des contraintes peut, par exemple, comprendre des forces de pelage et de cisaillement, des charges fluctuantes, une exposition à l'environnement et une charge constante. Les adhésifs capables de former des jonctions structurales sont couramment appelés "adhésifs-structuraux" [1, 21]. Le cadre industriel dans lequel s'inscrit ce travail de thèse permet de restreindre le champs de l'étude aux adhésifs polymères. La partie suivante rappelle les propriétés essentielles des polymères.

## 1.2 Les matériaux polymères

Le mot polymère vient du grec «polus» plusieurs, et «meros» parties. Les polymères sont de longs enchaînements de molécules liées entre elles. Ces molécules sont appelées monomères. Il y a trois grandes classes de polymères : les thermoplastiques, les thermodurcissables et les élastomères.

**Les thermoplastiques** sont constitués de chaînes de monomères linéaires ou ramifiées (Figure 1.1 a et b). Ces chaînes ne sont pas liées entre elles mais sont enchevêtrées. Les thermoplastiques se déforment et sont façonnables sous l'action de la chaleur. Ils reprennent leur forme initiale en refroidissant sauf dans le cas de réchauffements répétés.

**Les thermodurcissables** sont constitués de chaînes de monomères réticulées après polymérisation. Il existe des ponts entre les chaînes (Figure 1.1 c). Ils prennent leur forme définitive au premier traitement thermique, la réversibilité est impossible. Cette propriété les rend insolubles et infusibles. Dans la chaîne linéaire, les molécules peuvent se déplacer plus facilement que dans la structure réticulée.



**Les élastomères** sont constitués de longues chaînes moléculaires rassemblées, au repos, en « pelotes ». Ces chaînes sont reliées entre elles par des points de réticulation, des enchevêtrements ou encore des liaisons polaires avec des charges minérales. Elles forment un réseau. Un élastomère est un polymère « élastique » : il supporte de très grandes déformations ( $\gg 100\%$ ) presque totalement réversibles. Les élastomères sont incompressibles (ou très peu compressibles) ce qui équivaut à un coefficient de Poisson proche de 0,5.

Le tableau 1.1 récapitule les principales propriétés de ces trois types de polymères. A température ambiante, les thermodurcissables et les thermoplastiques ont un comportement vitreux. Sous l'effet d'une élévation de température ils deviennent caoutchouteux. Il est possible de définir une température caractéristique, appelée température de transition vitreuse  $T_g$  (Figure 1.2). Cette température de transition vitreuse est de l'ordre de grandeur de la température de polymérisation [27].

Les colles structurales sont caractérisées par leurs propriétés mécaniques, par leur tenue à la chaleur, aux basses températures et aux agents chimiques. Elles sont souvent à base de

Classes de polymère	Souplesse	Résistance mécanique	Résistance thermique	Résistance aux agents chimiques
Thermodurcissables	Mauvaise	Bonne	Bonne	Bonne
Thermoplastiques	Moyenne	Médiocre	Médiocre	Bonne
Elastomères	Très bonne	Mauvaise	Variable	Médiocre

TABLE 1.1 – Propriétés des polymères [82].

résines thermodurcissables [82]. En aéronautique, les adhésifs époxydes et phénoliques sont les plus utilisés [59]. Dans la marine, les époxydes sont le plus souvent utilisés [55]. Ils sont parmi les thermodurcissables les plus courants et les plus performants. Le cadre industriel dans lequel s'inscrit ce travail de thèse permet de restreindre le champs de l'étude aux adhésifs époxydes. La partie suivante s'intéresse à rappeler leurs propriétés essentielles.

### 1.3 Les adhésifs époxydes

Ce type d'adhésif est utilisé pour le collage des métaux car il offre une haute résistance mécanique et une mise en oeuvre plus simple que les adhésifs phénoliques [82]. Ils sont principalement commercialisés sous deux formes :

- Adhésifs à un composant (durcisseur et base dans un même composant). Ils polymérisent à chaud (à partir de 120 °C) [82].
- Adhésifs bi-composants (durcisseur et base livrés séparément). Ils peuvent polymériser à froid (à partir de 5 °C) [82].

Les colles époxydes à un composant ont une meilleure résistance mécanique et une meilleure résistance à la fatigue. La résistance mécanique n'est généralement pas affectée par des températures inférieures à 80 °C. Ils existent des adhésifs époxydes permettant des températures en service de 150 °C. Les propriétés des adhésifs époxydiques peuvent être modifiées par l'adjonction d'autres résines ou de caoutchouc : nylon, polyamide, polysulfure, phénolique, polyuréthane, silicone, etc... [82].

La résistance au cisaillement est un paramètre important dans la transmission des efforts dans un joint collé. Le tableau 1.2 compare quelques ordres de grandeurs de propriétés mécaniques d'adhésifs structuraux de différentes natures (phénolique, époxyde, ...). Le tableau 1.3 met en évidence l'influence des matériaux collés sur cette résistance. Les valeurs du tableau 1.2 ne peuvent donc pas être utilisées directement. La grande différence entre les performances mécaniques de l'adhésif et de celles du joint collé réside dans le fait que ce sont les propriétés de l'interphase qui conditionnent le comportement de l'assemblage, notamment la résistance et la durabilité des joints collés. Le joint collé est différent du polymère qui constitue l'adhésif car son comportement repose sur le comportement de l'interphase qui est du polymère endommagé [27].

### 1.4 Notions d'interphase

Utopiquement appelée interface, elle correspond à la zone de contact entre l'adhésif et chacun des substrats. Cette zone n'est pas un plan au sens géométrique. Elle a une

Adhésifs	Résistance au cisaillement ( N.mm <sup>-2</sup> )	Résistance au pelage ( N.mm <sup>-1</sup> )	Résistance à la traction ( N.mm <sup>-2</sup> )
Epoxyde	25	1	40
Epoxy-nylon	42	15	56
Epoxy-nitrile	35	4.5	-
Epoxy-phénolique	20	1	17
Phénolique-vynilique	25	5.4	28
Phénolique-nitrile	28	6.5	20

TABLE 1.2 – Résistances mécaniques des adhésifs structuraux [82].

Matériaux collés	Résistance au cisaillement ( N.mm <sup>-2</sup> )
Acier sur acier	17
Aluminium sur aluminium	34.5

TABLE 1.3 – Résistance à la rupture par cisaillement : influence des matériaux en présence (colle époxydique modifiée) [82].

épaisseur typiquement de 1 à 10  $\mu\text{m}$ , soit 0.1 à 1% de l'épaisseur du joint [119]. Elle est différente (dans sa nature et sa composition) aussi bien de l'adhésif que du substrat.

L'interphase époxyde/aluminium a été caractérisée au niveau microscopique. L'interphase apparaît avoir une épaisseur irrégulière entre 2  $\mu\text{m}$  et 6  $\mu\text{m}$  avec un module élastique effectif ( $E/(1 - \nu^2)$ ) 13% plus élevé que celui de l'adhésif massif (au coeur du joint). L'interphase est aussi 4% plus dure que l'adhésif [97]. Ainsi les propriétés des joints collés dépendent de celles des polymères qui forment l'adhésif et des interactions qui se créent avec la surface alors qu'il était liquide [27].

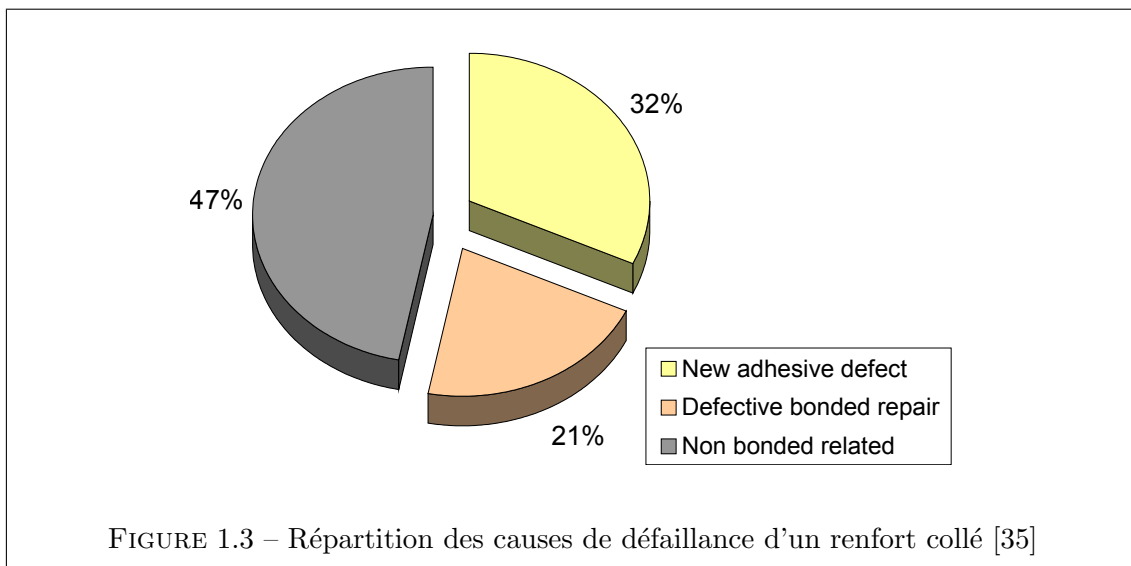
## 1.5 Mécanisme du collage

L'expérience de la Royal Australian Air Force (RAAF) dans le renforcement de structures aéronautiques par patches collés a montré que 53% des défaillances significatives étaient associées à des défaillances liées au joint de colle (Figure 1.3). L'utilisation d'adhésifs structuraux implique donc une bonne compréhension des mécanismes qui sont à l'origine du phénomène d'adhésion et de cohésion [1, 35] :

- L'adhésion est la force s'exerçant à la surface des matériaux en contact (entre les molécules ou les atomes de l'adhésif et des substrats). Cette adhésion est due en partie aux forces de Van de Waals [92].
- L'adhérence est la mesure de l'énergie nécessaire pour rompre les forces d'adhésion.
- La cohésion est la force exercée par les liaisons entre les molécules ou atomes à l'intérieur d'un même matériau (adhésif ou substrat).

Dans la littérature, le mécanisme de collage se résume par trois étapes principales [82] :

**Préparation de surface :** L'adhésif est à l'état naturel sous forme de liquide, de pâte ou de solide. Les surfaces sont préparées pour optimiser l'adhésion [40, 15,



54]. Les méthodes industrielles de préparation de surface peuvent être mécaniques (sablage, abrasion, ultrasons), chimiques (nettoyage aux solvants, nettoyage alcalin, décapages chimiques, primaires) ou physico-chimiques (flamme, traitement corona, traitement plasma, exposition aux ultraviolets) [81].

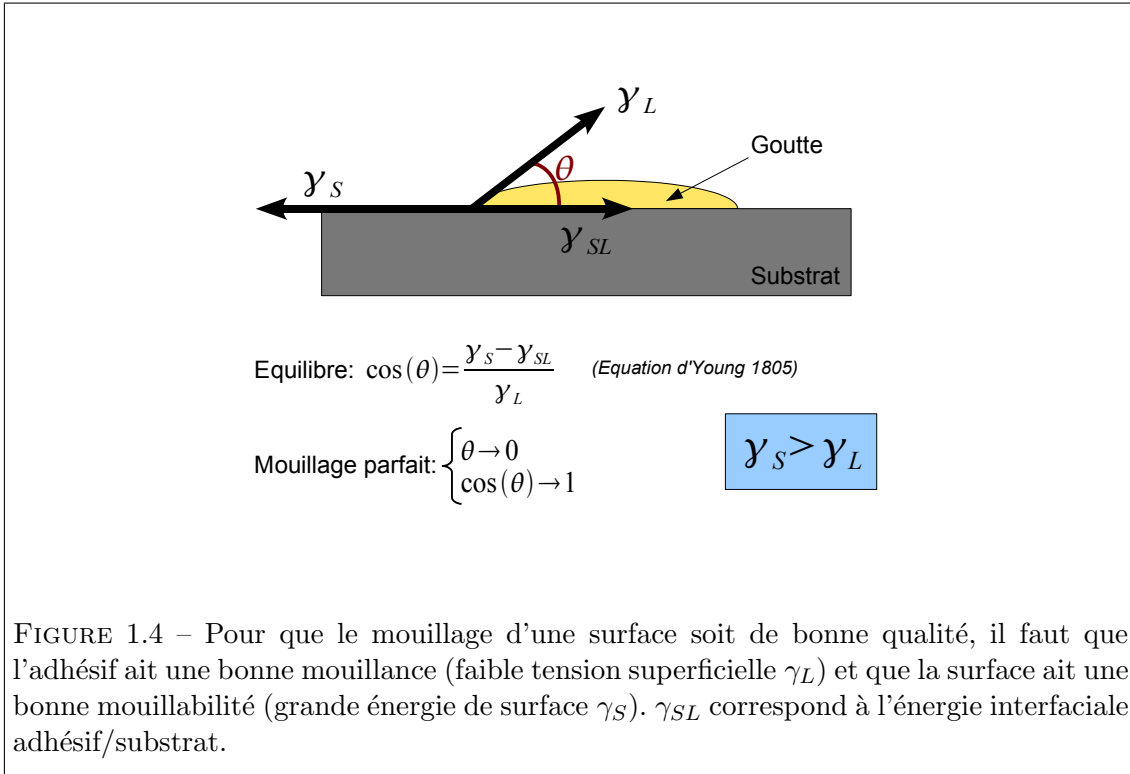
**Mouillage :** L'adhésif est appliqué sous forme liquide. Cette étape est appelée "mouillage". Elle permet l'adhésion par contact entre le substrat et l'adhésif (Figure 1.4). Pour que le mouillage d'une surface soit de bonne qualité, il faut que l'adhésif ait une bonne mouillabilité (faible tension superficielle  $\gamma_L$ ) et que la surface ait une bonne mouillabilité (grande énergie de surface  $\gamma_S$ ).  $\gamma_{SL}$  correspond à l'énergie interfaciale adhésif/substrat. Des exemples d'énergies de surface sont présentées tableau 1.4.

**Durcissement :** C'est la phase de durcissement ou de réticulation pour les thermodurcissables. Pendant cette étape, les forces de cohésion apparaissent pour rendre l'assemblage solide. Le durcissement est obtenu par voie physique (évaporation d'un solvant, pression, fusion, refroidissement) ou par voie chimique (mélange de plusieurs composants, apport de chaleur, action de l'humidité, absence d'air, activation par rayonnement UV). Un durcissement par traitement thermique plus long mais moins élevé en température génère moins de contraintes résiduelles dans l'époxy qu'un traitement élevé en température et court [23]. Lors de la cuisson de certaines colles, il est nécessaire d'exercer une pression pour éviter que la vapeur dégagée par l'adhésif ne repousse les adhérents [59].

## 1.6 Avantages et limites du collage

La littérature fait le point sur les avantages d'utiliser un adhésif par rapport aux solutions traditionnelles que sont le soudage, le rivetage, le vissage [64] :

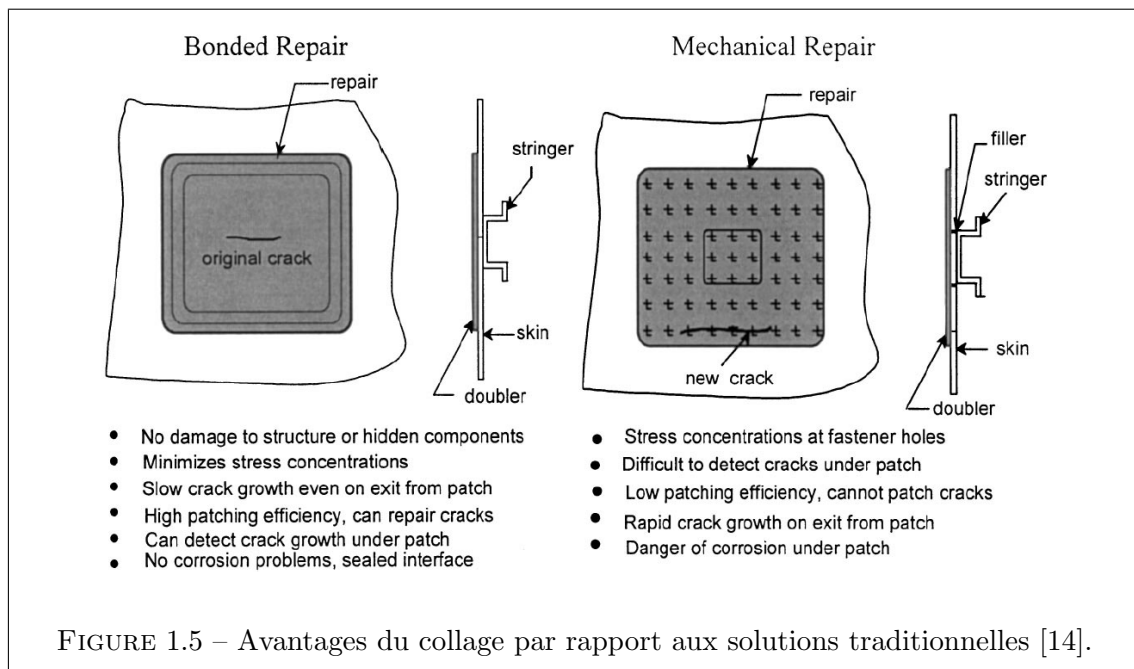
- Le collage est une méthode d'assemblage universelle qui permet d'assembler des matériaux aux propriétés très différentes (ex : verre + métal).



Matériau	Energie de surface ( mJ.m <sup>-2</sup> )
Fer	2000
Aluminium	840
Composite carbone-époxy	58
Polytétrafluoréthylène PTFE (téflon, viton)	18
Adhésifs	20 à 35

TABLE 1.4 – Ce tableau fait apparaître que pour certains matériaux comme le téflon, le collage n'est pas possible sans une préparation permettant d'augmenter l'énergie de surface [65].





- Le collage permet d’assembler les composants sans les affaiblir. Le traitement thermique reste inférieur à 200 °C (supérieur à 500 °C pour le soudage des aluminiums [2]). De plus, il n’est pas nécessaire de percer les composants contrairement au rivetage ou au vissage.
- L’assemblage par collage permet une continuité de la liaison [98]. De ce fait, la structure est plus rigide et possède une meilleure tenue en fatigue [14]. La figure 1.5 présente quelques désavantages des réparations standards et quelques avantages des réparations par collage d’un patch composite [13]. Le joint collé permet un meilleur transfert d’effort que les solutions mécaniques classiques [83]. Ferrier et al. proposent des courbes S-N pour deux modes de sollicitation de poutres en béton renforcées à l’aide de renforts composites collés [41].
- Le collage permet d’amortir les bruits et les vibrations [82].
- La corrosion galvanique est supprimée.
- Le collage permet de s’assurer de l’étanchéité de la structure assemblée [82].
- L’utilisation du collage permet un gain de poids. Il permet aussi une réduction des coûts (simplification des usinages, tolérances plus importantes,...).
- Il est possible d’utiliser le collage en association avec d’autres techniques d’assemblages (rivetage, clinchage, vissage, soudage par points, frettage, clipsage).
- Les adhésifs peuvent aussi présenter des propriétés spécifiques (isolation, conduction, qualité optique).
- Lorsque l’adhésif est utilisé pour fixer un raidisseur, l’espace non renforcé est réduit par rapport au rivetage [98] (Figure 1.6).

En opposition à ces avantages, il est possible de trouver des limites à l’utilisation des adhésifs :

- Il est préférable de faire travailler les joints collés en cisaillement, en traction ou en compression [27, 82]. Ainsi, toutes les configurations ne sont pas propices à l’utilisa-

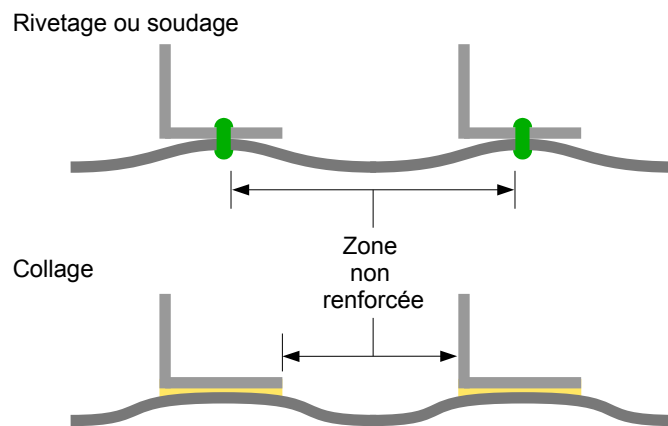


FIGURE 1.6 – La fixation d'un raidisseur par collage permet de diminuer la zone non renforcée pour le même nombre de raidisseurs utilisés [98].

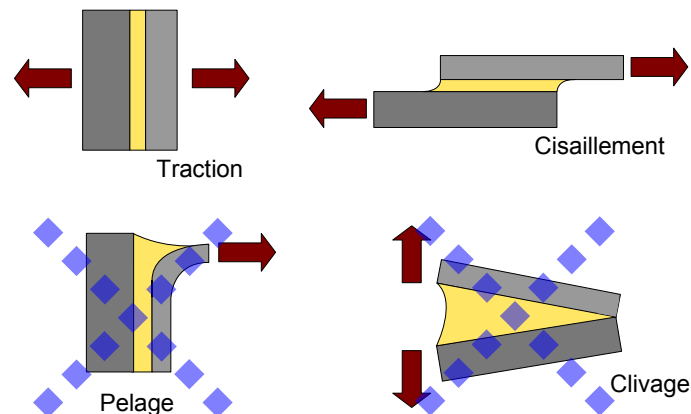


FIGURE 1.7 – Les joints collés doivent être conçus de manière à leur permettre de travailler en cisaillement ou en traction [82].

Propriété	Min-Max	Moyenne	Echantillon
Module d'Young	1.00 – 6.55 GPa	4.75 GPa	23
Résistance au cisaillement	2.24 – 41.4 MPa	16.7 MPa	121
Résistance à la traction	13.8 – 69.6 MPa	36.0 MPa	61
Résistance à la compression	16.0 – 159 MPa	79.3 MPa	38
Résistance au pelage	0.175 – 12.3 kNm <sup>-1</sup>	4.11 kNm <sup>-1</sup>	12
Déformation à rupture	1.20 – 20%	3.93%	43
Dilatation thermique	4.50 – 150 10 <sup>-6</sup> °C <sup>-1</sup>	51.8 10 <sup>-6</sup> °C <sup>-1</sup>	77

TABLE 1.5 – Propriétés mécaniques des adhésifs époxydes [2]. La dernière colonne précise le nombre d'échantillons utilisés pour déterminer les valeurs minimales, maximales et moyennes.

tion d'un adhésif (Cf. figure 1.7). Cependant, Da Silva et Adams précisent quelques solutions pour réduire la contrainte de pelage [34].

- A l'exception de quelques céramiques, les adhésifs ont une tenue thermique limitée comprise entre  $-110\text{ °C}$  et  $+250\text{ °C}$ .
- Il est nécessaire de préparer les surfaces pour augmenter l'adhésion.
- La durabilité des collages en milieu agressif n'est pas encore maîtrisée.
- Il s'avère difficile de réaliser des contrôles non destructifs pour s'assurer de la qualité d'un collage. Il est possible via des méthodes classiques (ultra-son, thermiques,...) de détecter des manques de colle. Il reste difficile de quantifier une mauvaise adhésion ou cohésion. Pour mesurer la cohésion, une méthode avec des hautes fréquences et une incidence normale donne les meilleurs résultats. Pour la mesure de l'adhérence, une méthode avec des hautes fréquences et incidence oblique est préférable [5].
- Le démontage ou le recyclage de composants collés peut s'avérer difficile.
- Pour remplacer une solution d'assemblage classique par du collage, il est parfois nécessaire de reconcevoir le produit pour permettre à l'adhésif d'être sollicité au mieux.
- Certains traitements de surface nécessitent l'utilisation de produits allergisants.

## 1.7 Propriétés mécaniques d'adhésifs époxydes

### 1.7.1 Aperçu général sur les caractéristiques mécaniques

Dans un premier temps, le tableau 1.5 donne un ordre de grandeur des principales propriétés mécaniques des adhésifs époxydes. Les propriétés d'un adhésif sont aussi dépendantes de la configuration dans laquelle il est testé. L'accent est mis sur la Redux<sup>®</sup> 312 L qui sera utilisée dans la partie expérimentale de ce travail. Les propriétés mécaniques sont détaillées dans la partie suivante. A titre d'exemple, l'annexe A traite de deux adhésifs rencontrés dans le secteur aéronautique.

### 1.7.2 Hexcel Redux<sup>®</sup> 312 L

La Redux<sup>®</sup> 312 L est un adhésif thermodurcissable à haute résistance utilisé pour assembler des métaux et des matériaux composites. Il présente de bonnes propriétés mécaniques jusqu'à  $100\text{ °C}$  [58]. Comme le montre la figure 1.8, la mise en oeuvre nécessite un

Propriété	Température du test	Valeur	Références
Module d'Young		3 GPa	[89]
Coefficient de Poisson		0.3	[89]
Résistance au cisaillement	22 °C	42 MPa	[58]
	70 °C	38 MPa	[58]
	80 °C	35 MPa	[58]
	100 °C	17 MPa	[58]
Résistance à la traction	22 °C	7.0 MPa	[58]
Résistance à la compression		48 MPa	[89]

TABLE 1.6 – Propriétés mécaniques de la Redux® 312 L [58, 89].

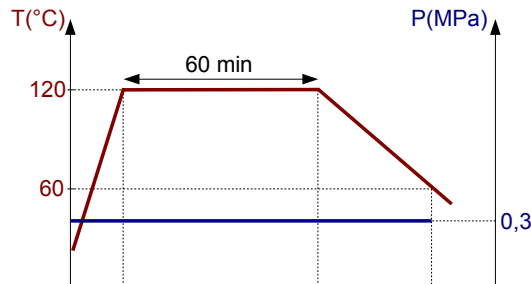


FIGURE 1.8 – Cycle de mise en oeuvre de la Redux® 312 L.

chauffage à 120 °C pendant 60 min précédé par une montée en température de 2 °C min<sup>-1</sup> à 4 °C min<sup>-1</sup>. Pendant ce cycle, l'assemblage est maintenu sous une pression de 0.3 MPa jusqu'à ce que la température soit redescendue à 60 °C. Les informations concernant cet adhésif sont plutôt rares. Le tableau 1.6 résume quelques valeurs tirées de la fiche produit d'Hexcel [58] ainsi que de la littérature [89].

Le comportement spécifique à chaque type d'utilisation nécessite bien souvent de réaliser des essais afin de caractériser les propriétés de l'adhésif par rapport aux adhérents et à l'utilisation qui en est faite.



## Chapitre 2

# Comportement mécanique : Interaction & Ancrage

---

<b>2.1</b>	<b>Historique des approches analytiques . . . . .</b>	<b>20</b>
<b>2.2</b>	<b>Rappel des approches classiques simplifiées . . . . .</b>	<b>22</b>
2.2.1	Modèle simplifié de joint à simple recouvrement . . . . .	22
2.2.2	Cas d'un composant renforcé sous chargement uniaxial . . . . .	23
<b>2.3</b>	<b>Limites des solutions classiques . . . . .</b>	<b>27</b>
<b>2.4</b>	<b>Rupture adhésive &amp; rupture cohésive . . . . .</b>	<b>28</b>
2.4.1	Critères de ruptures . . . . .	28
2.4.1.1	Critères basés sur le 2 <sup>nd</sup> invariant . . . . .	30
2.4.1.2	Critère de Drücker-Prager . . . . .	31
2.4.1.3	Critère de Gali, Dolev et Ishai . . . . .	32
2.4.2	Applications traitées dans la littérature . . . . .	32
2.4.2.1	Critères de contrainte ou de déformation maximale . . . . .	32
2.4.2.2	Critères de contrainte ou déformation à un certaine distance ou dans une zone . . . . .	34
2.4.2.3	Choix d'un critère de rupture du joint collé . . . . .	34

---

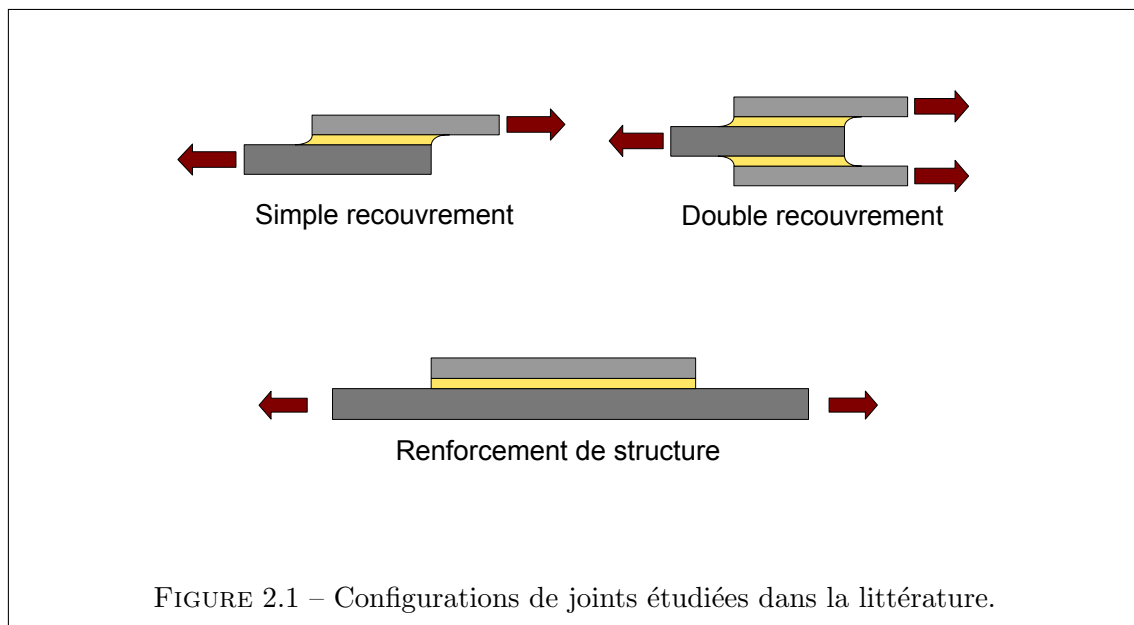
Les joints collés sont utilisés pour transférer des efforts d'un adhérent à un autre par une sollicitation de cisaillement. Cependant, l'excentricité des chargements génère des contraintes normales transverses (aussi appelées contraintes de pelage). Ces contraintes peuvent être à l'origine de la défaillance du joint. Ainsi, il est très important de pouvoir déterminer correctement ces contraintes dans l'assemblage collé afin de prévenir la rupture [127].

## 2.1 Historique des approches analytiques

Les premiers travaux de modélisations sur les assemblages collés sont généralement attribués à Volkersen (1938) [120]. Il est le premier à proposer un modèle de joint à simple recouvrement (Figure 2.1) en faisant les hypothèses suivantes :

- Les matériaux sont supposés élastiques linéaires isotropes
- Les adhérents ne travaillent qu'en traction.
- Le joint ne travaille qu'en cisaillement.
- Les contraintes et déformations sont supposées constantes dans l'épaisseur.

Ce modèle ne prend pas en considération les effets de flexion ou de déformation de l'adhésif.



En 1944, de Bruyne adapte la théorie de Volkersen au joint à double recouvrement [36] (Figure 2.1). Goland & Reissner [46] étudient les effets de flexion dus à l'excentricité du chargement dans un joint à simple recouvrement. De plus, ils donnent une formulation pour la contrainte de pelage. En 1973, Hart-Smith améliore ces modèles pour tenir compte de la plasticité [50, 52]. Adams et Peppiatt étudient l'effet Poisson dans le joint à simple recouvrement [8]. En 1984, Oplinger étudie l'influence des grands déplacements sur les joints à simple recouvrement [88]. En 1995, Tsai et Morton étudient expérimentalement l'influence du bourrelet d'excédent d'adhésif [117]. Ce dernier permet de diminuer considérablement le niveau de contrainte de pelage et de cisaillement. Dans les années 1990, Wang et Rose calculent les contraintes normales longitudinales et latérales dans un joint

	Loi de comportement des matériaux				Adhérents				Contraintes dans l'adhésif			Solution		
	Adhésif Linéaire	Adhésif Non Linéaire	Adhérent Linéaire	Adhérent Non Linéaire	Isotrope	Composite	Symétriques	Epaisseurs différentes	Matériaux différents	$\sigma_x$	$\sigma_z$	$\tau_{xz}$	Analytique	Numérique
Volkersen [120]	X		X		X		X	X				X	X	
Goland et Reissner [46]	X		X		X		X				X	X	X	
Wah [121]	X		X		X	X	X	X				X	X	X
Hart-Smith [50, 52]	X	X	X		X		X				X	X	X	
Pirvics [93]	X		X		X		X	X	X		X	X	X	X
Grines et Greimann	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X	X		
Renton et Vinson [96, 95]	X		X		X	X	X	X	X		X	X	X	X
Srinivas [107]	X		X		X	X	X	X	X		X	X	X	
Allman [10]	X		X		X	X	X				X	X	X	
Ojalvo et Eidinoff [86]	X		X		X		X				X	X	X	
Dedale et al.[38]	X	X	X		X	X	X	X	X		X	X	X	
Bigwood et Crocombe [19]	X	X	X		X		X	X	X		X	X	X	
Cheng et al. [25]	X		X		X		X	X	X	X	X	X		X
Adams et Mallick [7]	X	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Tong [113]	X	X	X		X		X				X	X	X	
Yang et Pang [125]	X		X		X	X	X	X	X		X	X		X
Frostig et al. [42]	X		X		X	X	X	X	X		X	X	X	X
Sawa et al. [99]	X		X		X		X	X	X	X	X	X	X	X
Mortensen et Thomsen [83]	X	X	X		X	X	X	X	X			X		
Adams et al. [5]	X	X	X	X	X		X						X	
Wang et al. [124]	X	X	X	X	X		X	X	X	X	X	X		X
Smeltzer et Klang [104]	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X	X		X

TABLE 2.1 – Synthèse des approches disponibles dans la littérature concernant les joints à simple recouvrement [33].



à simple recouvrement [122]. Tong, Sheppard et Kelly étudient l'influence de l'alignement des adhérents sur les joints à double recouvrement [114]. Un défaut de symétrie génère un moment dans l'assemblage. Ainsi, ce décalage provoque de la flexion qui augmente les contraintes de pelage dans l'adhésif.

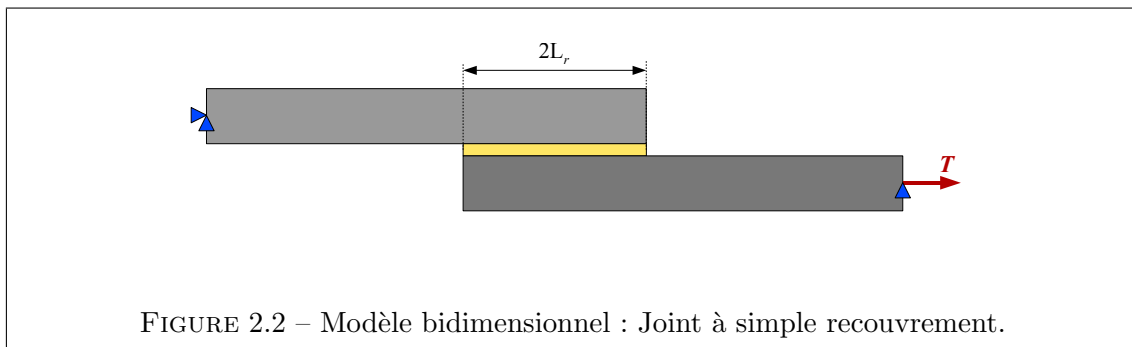
La contrainte de pelage augmente avec l'épaisseur du renfort et diminue avec l'augmentation de l'épaisseur de l'adhésif [87, 108, 112]. Par la suite les outils numériques ont permis d'étudier plus précisément la zone d'extrémité. En 2007, da Silva et Adams étudient l'influence de la forme de la zone d'ancrage sur les pics de contraintes de pelage [34]. Tsai, Oplinger et Morton améliorent le modèle de Goland & Reissner en supposant que le cisaillement est linéaire dans l'épaisseur des adhérents [118]. En 2006, Smeltzer et Lundgren étudient le cas du joint à simple recouvrement soumis à de la flexion pure [105]. Tous ces modèles donnent le maximum de cisaillement à l'extrémité libre du joint. En réalité, au bord libre, le cisaillement est nul, il est maximal à une certaine distance du bord libre [104, 123] (Cf. figure 2.7). Après l'étude de Hart-smith [51], Mortensen et Thomsen s'intéressent en 1997 aux joints biseautés [84].

Avec l'amélioration des techniques de collage, les adhésifs ont été utilisés pour coller des structures aéronautiques, des structures de génie civil, etc... En aéronautique, il a été montré que lors de l'apparition de fissures, le collage d'un patch retardait la propagation de cette dernière [71, 56, 26, 100, 11]. Des modèles de renforcement (Figure 2.1) sont étudiés dans la littérature [9, 67, 12, 102, 77, 106]. En 2002, Sierra-Ruiz, Destrebecq et Grédiac développent un modèle analytique d'une structure en béton renforcée par un patch composite soumise à divers chargements [101]. En 2006, Mathias, Grédiac et Balandraud étudient le comportement dans le plan sur un renfort rectangulaire dans le cadre des hypothèses de Volkersen [76]. Da Silva et al. ont réalisé un tableau récapitulatif des solutions pour les joints à simple recouvrement présentant les hypothèses retenues ainsi que le type de solution cherché (Cf. Tableau 2.1). Les deux exemples suivant traitent le cas d'un joint à simple recouvrement et le cas d'un renforcement de structure.

## 2.2 Rappel des approches classiques simplifiées

### 2.2.1 Modèle simplifié de joint à simple recouvrement

L'approche la plus simple consiste à supposer que l'adhésif ne travaille qu'en cisaillement et que les adhérents sont rigides (Cf. figure 2.2). Le cisaillement dans le joint est supposé constant dans la zone de recouvrement. Dans ce cas,



$$\tau = \frac{T}{2bL_r} \quad (2.1)$$

où  $\tau$  est la contrainte moyenne de cisaillement dans l'adhésif. Cette méthode, simple et peu réaliste, constitue la base pour la détermination de la résistance en cisaillement dans beaucoup de tests comme les standards ASTM et ISO [33]. Depuis les travaux précurseurs de Volkersen [120], suivis de ceux de de Bruyne [36] et de Goland & Reissner [46], premiers auteurs à avoir jeté les bases pour l'analyse du mécanisme d'interaction dans les assemblages collés, il est bien connu que l'état de contrainte au sein du joint de colle est très différent de l'idéalisation précédente. Ceci se trouve illustré dans la section suivante au travers d'une application du modèle de Volkersen au cas d'un composant renforcé, sollicité en traction uniaxiale.

### 2.2.2 Cas d'un composant renforcé sous chargement uniaxial

Dans cette partie, la méthode de Volkersen est redéveloppée et adaptée au cas d'une poutre renforcée. L'étude d'un modèle simple de renforcement est rappelée. Dans cette approche simplifiée, la flexion de l'assemblage due à l'excentricité du chargement, est négligée. Seule la contrainte de cisaillement est calculée. La figure 2.3 présente la constitution et les paramètres géométriques du modèle unidimensionnel d'une structure renforcée par l'ajout d'un renfort collé. Les notations suivantes sont utilisées :

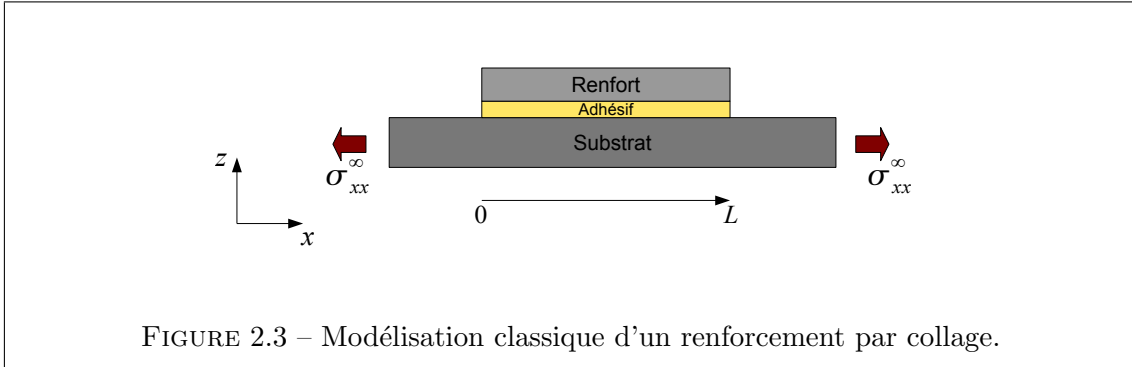


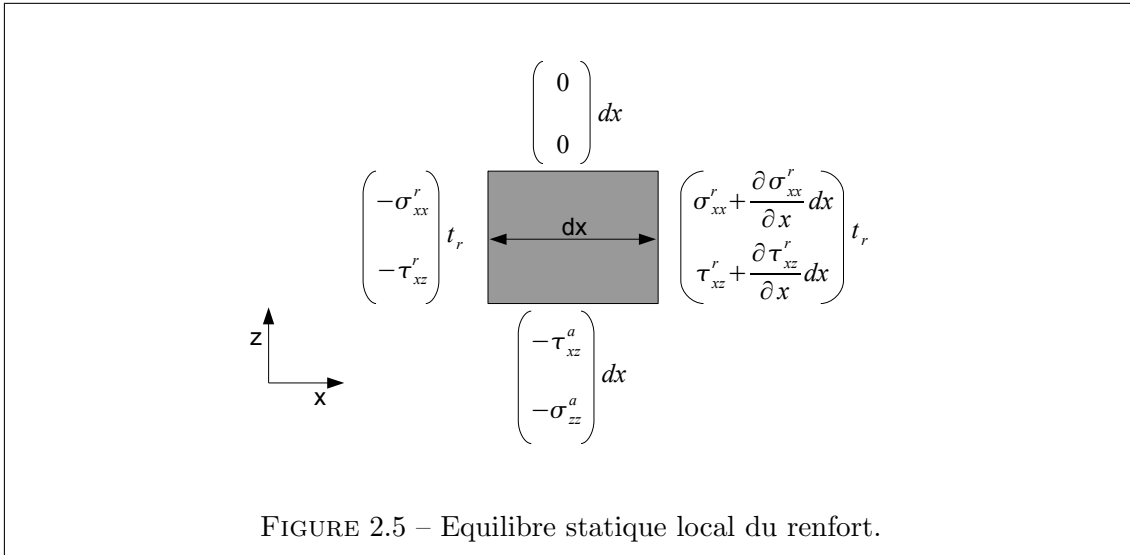
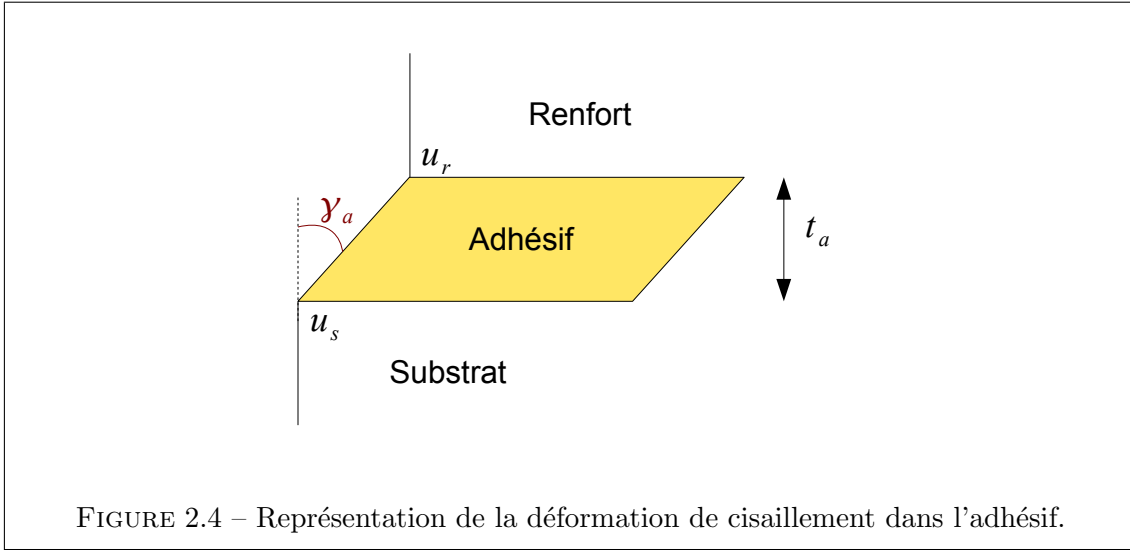
FIGURE 2.3 – Modélisation classique d'un renforcement par collage.

- $L$  représente la longueur du renfort.
- $t_r$ ,  $t_s$  et  $t_a$  représentent les épaisseurs respectives du renfort, du substrat et de la colle.
- $E_r$  et  $E_s$  représentent les modules d'Young du renfort et du substrat.
- $G_a$  représente le module de cisaillement de la colle.
- $\sigma_{xx}^r$  représente la contrainte normale suivant  $x$  dans le renfort.
- $\tau_{xz}^a$  représente le cisaillement suivant  $xz$  dans la colle.
- $\sigma_{xx}^\infty$  représente le chargement extérieur appliqué au substrat suivant  $x$ .

Le développement des calculs est réalisé dans les hypothèses du modèle de Volkersen [120]. Les déformations du renfort et du substrat s'écrivent :

$$\varepsilon_{xx}^r = \frac{du_r}{dx} \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_{xx}^s = \frac{du_s}{dx} \quad (2.3)$$



La déformation de cisaillement de l'adhésif s'écrit (Figure 2.4) :

$$\gamma_a(x) = \frac{u_s(x) - u_r(x)}{t_a} \quad (2.4)$$

La projection de l'équilibre statique donne (Figure 2.5) :

$$\text{Direction longitudinale : } t_r \frac{d\sigma_{xx}^r}{dx} - \tau_{xz}^a = 0 \quad (2.5)$$

$$\text{Direction transverse : } \frac{d\tau_{xz}^r}{dx} - \sigma_{zz}^a = 0 \quad (2.6)$$

Les efforts internes dans la section sont considérés constants. Il vient, en supposant que l'effort normal dans la colle est négligeable :

$$t_s \sigma_{xx}^\infty = t_r \sigma_{xx}^r + t_s \sigma_{xx}^s \quad (2.7)$$

En utilisant l'hypothèse de comportement linéaire pour les matériaux, les équations 2.4 et 2.5 donnent :

$$t_r \frac{d\sigma_{xx}^r}{dx} = \frac{u_s(x) - u_r(x)}{t_a} G_a \quad (2.8)$$

Après dérivation et arrangement, il vient :

$$\frac{d^2\sigma_{xx}^r}{dx^2} - \omega^2 \sigma_{xx}^r = \lambda \quad (2.9)$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega^2 = \frac{G_a}{t_a} \left( \frac{1}{t_r E_r} + \frac{1}{t_s E_s} \right), [\omega \text{ en m}^{-1}] \\ \lambda = -\frac{G_a \sigma_{xx}^\infty}{t_a t_r E_s}, [\lambda \text{ en MPa.m}^{-2}] \end{array} \right. \quad (2.10)$$

$$(2.11)$$

La solution générale de l'équation 2.9 est de la forme :

$$\sigma_{xx}^r(x) = A \cosh(\omega x) + B \sinh(\omega x) - \frac{\lambda}{\omega^2} \quad (2.12)$$

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx}^r(0) = 0 \\ \sigma_{xx}^r(L) = 0 \end{array} \right. \quad (2.13)$$

$$(2.14)$$

Il vient pour  $\sigma_{xx}^r$  :

$$\sigma_{xx}^r(x) = \frac{\lambda}{\omega^2} \left( \cosh(\omega x) + \frac{1 - \cosh(\omega L)}{\sinh(\omega L)} \sinh(\omega x) \right) - \frac{\lambda}{\omega^2} \quad (2.15)$$

Il est aussi possible à partir des équations 2.5 et 2.15 d'obtenir  $\tau_{xz}^a$  :

$$\tau_{xz}^a(x) = \frac{\lambda t_r}{\omega} \left( \sinh(\omega x) + \frac{1 - \cosh(\omega L)}{\sinh(\omega L)} \cosh(\omega x) \right) \quad (2.16)$$

La longueur de transfert est définie comme l'inverse de la grandeur  $\omega$  [53, 78] :

$$l_0 = \frac{1}{\omega} \quad (2.17)$$

Avec les valeurs usuelles rencontrées dans la littérature, la longueur de transfert est de quelques millimètres [39]. En zone d'extrémité, en supposant  $l_0 \ll L$  et pour  $x \in \left[0, \frac{L}{2}\right]$ ,  $\sigma_{xx}^r$  et  $\tau_{xz}^a$  se réécrivent [101] (le calcul est détaillé en annexe B) :

$$\tau_{xz}^a(x) = -\lambda l_0 t_p \exp\left(\frac{-x}{l_0}\right) = \tau_{\max}^a \exp\left(\frac{-x}{l_0}\right) \quad (2.18)$$

et,

$$\sigma_{xx}^p(x) = -\lambda l_0^2 \left[ 1 - \exp\left(\frac{-x}{l_0}\right) \right] = \sigma_{\max}^r \left[ 1 - \exp\left(\frac{-x}{l_0}\right) \right] \quad (2.19)$$

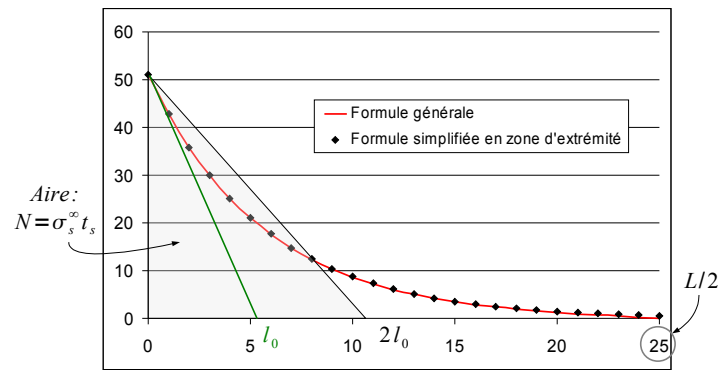


FIGURE 2.6 – Comparaison de la formule générale du cisaillement avec la formule en zone d'extrémité.

Renfort	Adhésif	Substrat
$E_r = 200000 \text{ MPa}$	$G_a = 650 \text{ MPa}$	$E_s = 72000 \text{ MPa}$
$t_r = 1 \text{ mm}$	$t_a = 0.2 \text{ mm}$	$t_s = 3 \text{ mm}$
Géométrie & Chargement		
$\sigma_{xx}^\infty = 200 \text{ MPa}$		
$L = 50 \text{ mm}$		

TABLE 2.2 – Ce tableau donne les paramètres matériaux utilisés pour l'obtention des courbes présentées sur la figure 2.6.

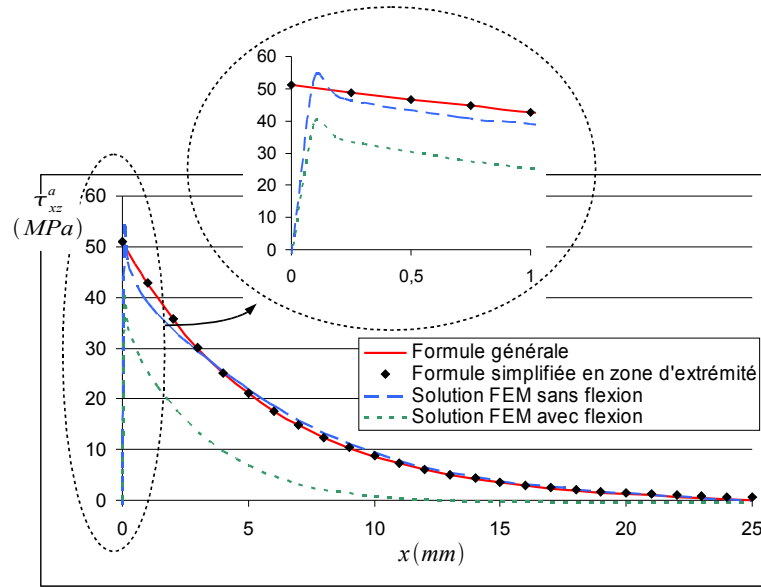


FIGURE 2.7 – La figure montre que le modèle analytique ne respecte pas la condition du cisaillement nul au bord libre [104, 123]. En revanche, le modèle éléments finis respecte cette condition. Il est intéressant de remarquer que la prise en compte des effets de flexion ne sont pas négligeables.

La figure 2.6 présente la répartition de la contrainte de cisaillement obtenue le long du joint sur la base des valeurs données dans le tableau 2.2 en comparant la formule générale et la formule simplifiée. Les paramètres ont été choisis de telle sorte que les rigidités du substrat et du renfort soient comparables. Il a été prouvé que le renfort était plus efficace dans cette configuration [87]. La figure 2.7 montre que le modèle analytique ne respecte pas la condition du cisaillement nul à l'extrémité [104, 123]. En revanche, le modèle éléments finis respecte cette condition. Ce modèle (avec ou sans flexion) met en évidence les effets non négligeables induits par la flexion des adhérents. La prise en compte des effets de flexion donne une contrainte de cisaillement 20% inférieure au modèle sans flexion de Volkersen. Le modèle de Volkersen étant plus rigide, il surestime les contraintes.

## 2.3 Limites des solutions classiques

Les approches classiques, telles que celles rappelées ci-dessus présentent quelques limites [33] :

- Ces modèles ne prennent pas en compte la variation des contraintes dans l'épaisseur du joint. Pourtant, il a été montré que les points critiques correspondent à l'interface [72]. Ojalvo et Eidinoff ont étudié l'influence de la variation des contraintes dans l'épaisseur de l'adhésif dans le cas d'un joint à simple recouvrement [86]. Ils concluent que négliger la variation des contraintes au sein de l'adhésif ne modifie pas le comportement en zone courante. Le pic de contrainte de cisaillement augmente et

- le pic de contrainte de pelage diminue lorsque cet effet est pris en compte.
- Les adhérents sont considérés comme des poutres fines. Ainsi, les déformations de cisaillement et les déformations transverses dans les adhérents sont négligées. Le cisaillement dans les adhérents est particulièrement important pour les matériaux composites. Tsai, Oplinger et Morton prennent en compte l'influence des déformations de cisaillement et les déformations transverses dans les adhérents. Ils montrent que leur modèle coïncide davantage avec les résultats expérimentaux, spécialement dans le cas d'adhérents en composite [118].
- Le pic de contrainte n'est pas réellement à l'extrémité de la zone de recouvrement. Cette approximation est en contradiction avec la condition de bord libre, ce qui amène à surestimer les pics de contraintes (Cf Figure 2.8). Allman [10] et Chen et Cheng [25] montrent que le pic de contrainte se situe à proximité de l'extrémité de la zone de recouvrement. Dans la configuration d'un joint à simple recouvrement, Chen et Cheng concluent qu'avec un adhésif relativement flexible, le pic de contrainte de cisaillement se situe à une distance de l'extrémité libre égale à 20% de l'épaisseur de l'adhérent.
- Les modèles sont souvent réalisés dans une configuration spécifique. Un modèle développé dans le cas du joint à simple recouvrement par exemple, n'est pas directement applicable au cas d'une poutre renforcée.
- Les approches classiques négligent en général l'influence des effets de courbure dans le calcul des contraintes au sein de l'adhésif.
- Les approches classiques négligent le couplage qui existe entre la contrainte de cisaillement et de pelage. En extrémité, ce couplage vient amplifier le pic de contrainte.

## 2.4 Rupture adhésive & rupture cohésive

L'analyse des contraintes est une partie importante du processus de conception. Il est aussi important de pouvoir définir le chargement critique pour lequel le joint rompt. Helsehurst et Hart-Smith ont répertorié les différents modes de rupture au niveau du joint collé (Figure 2.9) [57]. Dans un joint à simple recouvrement, il a été montré que les zones critiques étaient situées aux points A et B (Figure 2.10) [72]. Dans la littérature, plusieurs types de critère sont proposés afin de définir les limites d'utilisation des assemblages collés.

### 2.4.1 Critères de ruptures

La résistance des matériaux est basée sur l'étude de critères de rupture. Il est possible de définir une frontière du domaine d'utilisation qui fait intervenir toutes les composantes du tenseur des contraintes  $\sigma$  et la variable d'écrouissage. Cette variable se réduit à un scalaire dans le cas de l'écrouissage isotrope. Le seuil de plasticité  $\sigma_s$  est choisi pour représenter cette variable. Dans le cas d'un matériau n'ayant pas subi d'écrouissage, cette variable est égale à la limite élastique  $\sigma_y$  [70]. La frontière du domaine est définie par :

$$f(\sigma, \sigma_y) = 0 \quad (2.20)$$

L'isotropie impose que la frontière du domaine soit invariante par changement de repère. La fonction  $f$  ne dépend ainsi que des 3 invariants du tenseur  $\sigma$  [70]. La frontière se réécrit :

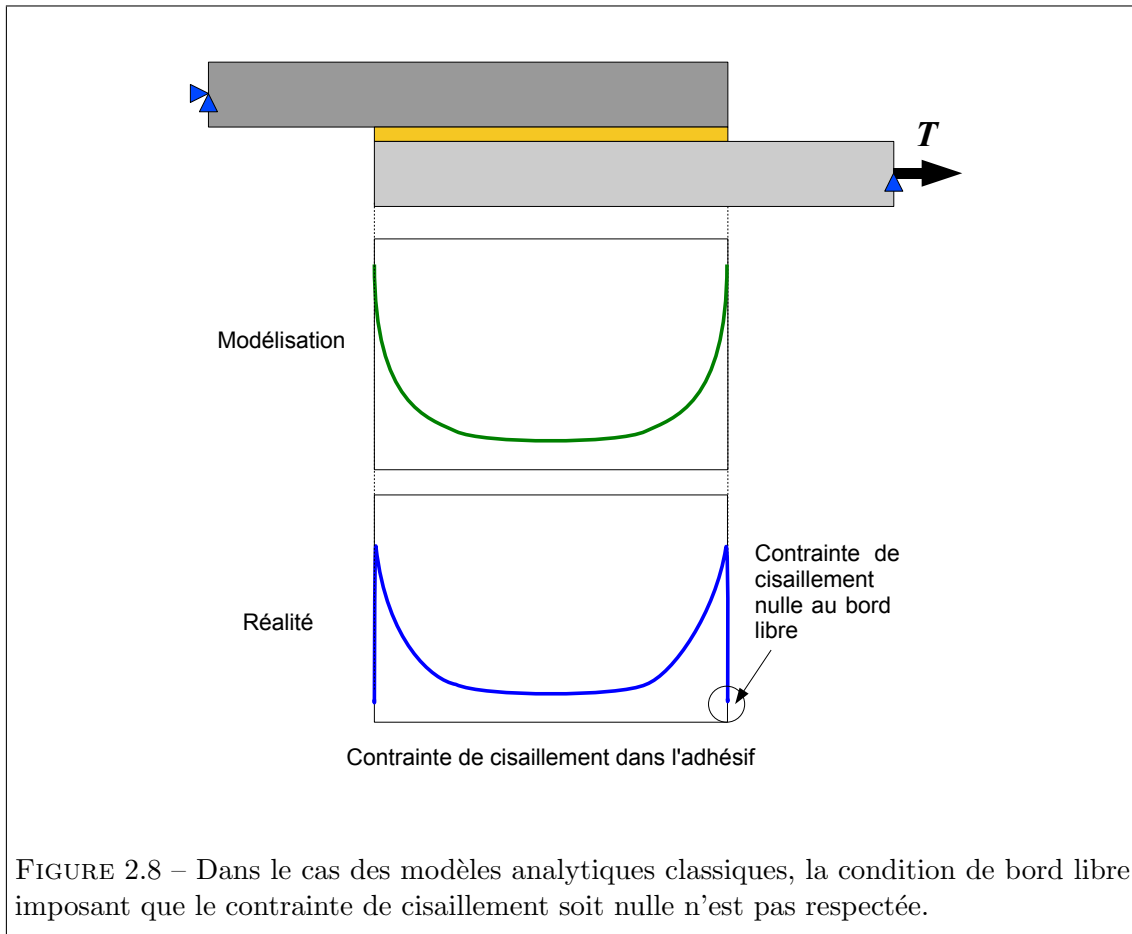


FIGURE 2.8 – Dans le cas des modèles analytiques classiques, la condition de bord libre imposant que le contrainte de cisaillement soit nulle n'est pas respectée.

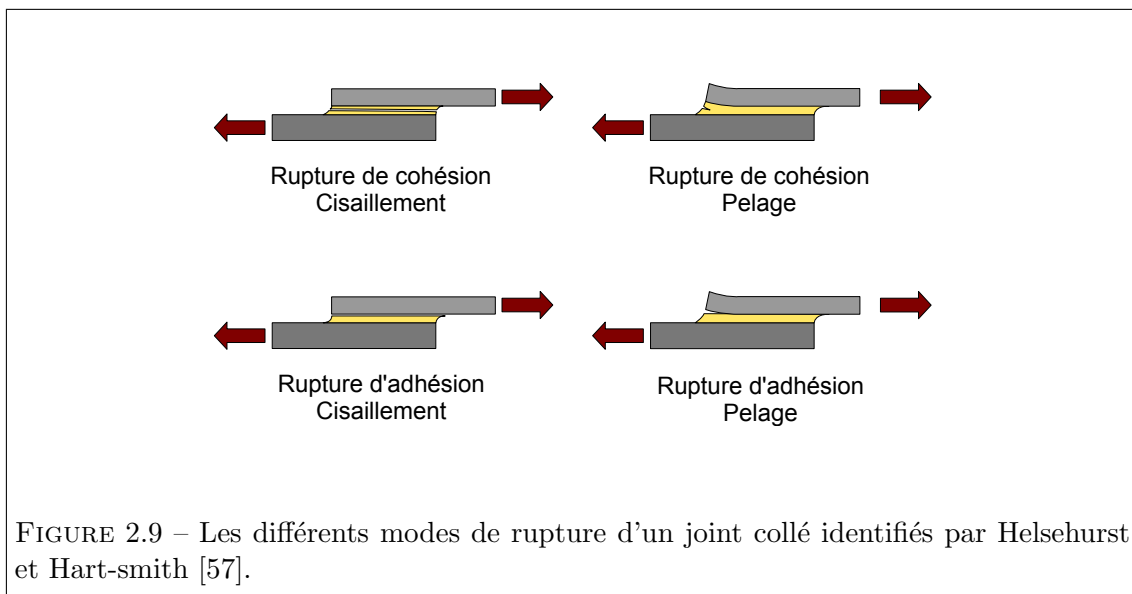
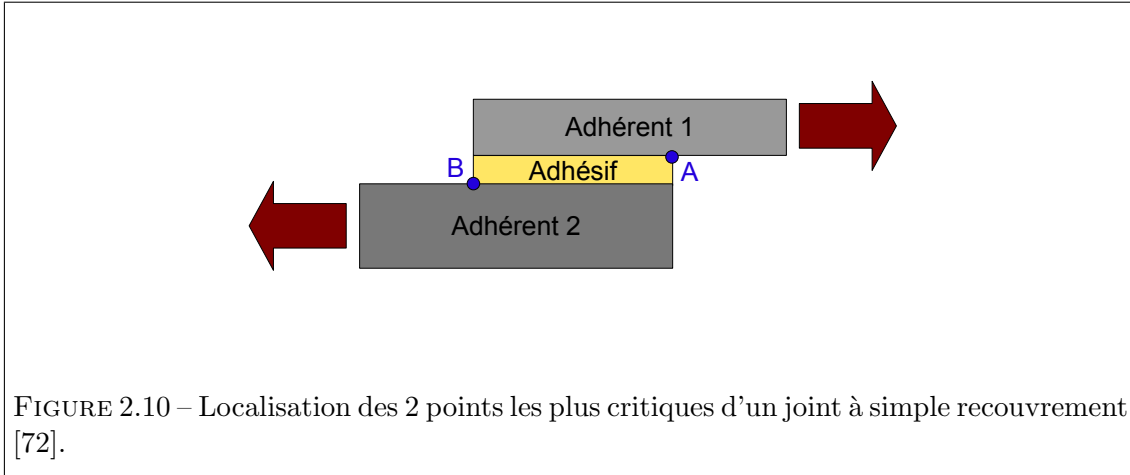


FIGURE 2.9 – Les différents modes de rupture d'un joint collé identifiés par Helsehurst et Hart-smith [57].





$$f(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}, \sigma_y) = 0 \quad (2.21)$$

Avec,

$$\begin{cases} \sigma_I &= \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \\ \sigma_{II} &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}^2) \\ \sigma_{III} &= \frac{1}{3} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}^3) \end{cases} \quad (2.22)$$

Dans le cas d'un matériau présentant une incompressibilité plastique et l'indépendance du comportement vis-à-vis de la contrainte hydrostatique (comme les métaux ductiles), il suffit de faire intervenir le tenseur déviateur des contraintes [70] :

$$\boldsymbol{\sigma}_D = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \sigma_I \mathbf{I} \quad (2.23)$$

Dans le cas isotrope, il est suffisant d'utiliser les invariants  $s_{II} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}_D^2)$  et  $s_{III} = \frac{1}{3} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}_D^3)$ . L'expression générale de la frontière du domaine s'écrit donc :

$$f(s_{II}, s_{III}, \sigma_y) = 0 \quad (2.24)$$

#### 2.4.1.1 Critères basés sur le 2<sup>nd</sup> invariant

Dans le cas du critère de Von Mises, l'hypothèse est faite que le seuil de plasticité est lié à l'énergie élastique de cisaillement. Ceci revient à négliger l'influence de  $\sigma_I$  et  $\sigma_{III}$  [70], ce qui conduit à l'expression de  $f$  :

$$f = \sigma_{eq} - \sigma_y = 0 \quad (2.25)$$

Avec,

$$\begin{aligned} \sigma_{eq} &= \sqrt{3s_{II}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2)} \end{aligned} \quad (2.26)$$

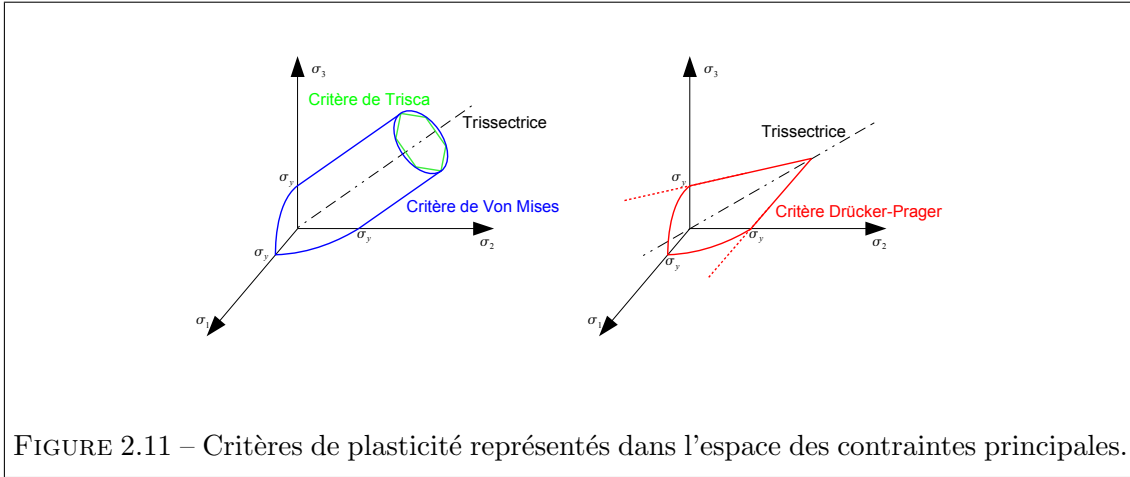


FIGURE 2.11 – Critères de plasticité représentés dans l'espace des contraintes principales.

$\sigma_{eq}$  est la contrainte équivalente de Von Mises.

Dans le cas de Tresca, le critère n'est plus lié à l'énergie de cisaillement mais à la contrainte de cisaillement maximale [70]. Elle s'écrit :

$$\frac{1}{2} \sup_{i \neq j} (|\sigma_i - \sigma_j|) \quad (2.27)$$

En raisonnant de la même manière que précédemment, il vient :

$$f = \sup (|\sigma_i - \sigma_j|) - \sigma_y = 0 \quad (2.28)$$

Cette fonction se réécrit aussi en fonction des invariants du déviateur de contrainte.

$$f = 4s_{II}^3 - 27s_{III}^2 - 9\sigma_y^2 s_{II}^2 + \sigma_y^4 s_{II} - \sigma_y^6 = 0 \quad (2.29)$$

Il y a peu de différence entre le critère de Von Mises et le critère de Tresca. Le critère de Tresca représente mieux les matériaux très ductiles. Pourtant, ce critère étant plus délicat à mettre en place (en raison des discontinuités de normale à la surface), le critère de Von Mises reste le plus usité [70]. En général, ces critères sont utilisés pour des matériaux métalliques. Ils ne font intervenir que la part de cisaillement de la sollicitation. La partie hydrostatique du chargement est négligée. Ces critères ne sont donc pas adaptés aux adhésifs.

#### 2.4.1.2 Critère de Drucker-Prager

Dans le cas de matériaux poreux (sols, roches, béton, mousses...) il n'est pas raisonnable d'utiliser le critère de Von Mises car d'autres mécanismes de ruine existent par croissance ou effondrement de cavités [17]. Il est nécessaire de faire apparaître le premier invariant du tenseur des contraintes dans le critère, qui s'écrit alors [3] :

$$f = \sqrt{s_{II}} + 3\beta\sigma_I - \sigma_y = 0 \quad (2.30)$$

Avec,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \beta &= \frac{2 \sin \Phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \Phi)} \\ \beta &: \text{Constante du matériau} \\ \Phi &: \text{Angle de friction interne} \\ c &: \text{Coefficient de cohésion} \\ \sigma_y &= \frac{6c \cos \Phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \Phi)} \end{array} \right. \quad (2.31)$$

Ce critère transforme le cylindre de Von Mises en un cône (Figure 2.11). Son principal inconvénient est de ne pas décrire l'effondrement de la matière sous de fortes pressions hydrostatiques puisque le critère reste ouvert dans ce domaine. Il s'utilise pour les matériaux élastiques/parfaitement plastiques. Par analogie, il est possible de fermer le critère de Tresca. Ce critère correspond au critère de Mohr-Coulomb. Une formulation du critère Drucker-Prager existe pour des modèles élasto/plastiques plus complexes [3].

#### 2.4.1.3 Critère de Gali, Dolev et Ishai

Le critère de Gali, Dolev et Ishai est une variante du critère précédent. Il tient compte de l'influence du 1<sup>er</sup> invariant. Dans la littérature, il est montré que pour les matériaux affectés par  $\sigma_I$ , le critère de rupture peut s'écrire [63, 73, 91] :

$$f = C_s \sqrt{s_{II}} + C_v \sigma_I - \sigma_y = 0 \quad (2.32)$$

Avec,

$$\left\{ \begin{array}{ll} C_s &= \frac{\sqrt{3}(1 + \lambda)}{2\lambda} \\ C_v &= \frac{(\lambda - 1)}{2\lambda} \\ \lambda &= \frac{\sigma_y^c}{\sigma_y^t} : \text{Rapport entre la limite élastique en compression/traction} \end{array} \right. \quad (2.33)$$

Lorsque  $\lambda = 1$ , le critère de Gali, Dolev et Ishai se réduit au critère de Von Mises [91]. Pour les époxydes,  $\sigma_y^c > \sigma_y^t$ , une valeur communément admise du rapport  $\lambda$  est 1.3 [68, 49].

### 2.4.2 Applications traitées dans la littérature

Odi et Friend ont regroupé les critères de défaillance d'un joint collé en différentes catégories [85] :

- Critères de contrainte ou de déformation maximale,
- Critères de contrainte ou de déformation à une certaine distance ou dans une zone,

#### 2.4.2.1 Critères de contrainte ou de déformation maximale

Cette catégorie est la plus dense pour les adhésifs structuraux. L'approche par la résistance des matériaux et par formule analytique prévoit que la résistance du joint collé augmente avec l'épaisseur du joint. Ce résultat se confirme par un modèle éléments finis

linéaire en utilisant la contrainte moyenne au milieu du joint [127]. En revanche, ce résultat est contradictoire avec les expériences menées par Tomblin, Harter et Seneviratne [112]. Ils trouvent que la résistance diminue avec l'augmentation de l'épaisseur du joint collé. Gleich, Tooren et Beukers prouvent que l'erreur provient d'une mauvaise interprétation du modèle éléments finis [45]. En réalité, le pic de cisaillement et de pelage à l'interface augmente avec l'augmentation de l'épaisseur du joint. Harris et Adams ont utilisé un modèle éléments finis non-linéaire pour étudier la rupture de plusieurs joints à simple recouvrement (adhérents aluminium). Ils concluent que différents critères sont nécessaires selon le type d'adhésif utilisé (critère de contrainte maximale et critère de déformation maximale) [49].

**Critère de déformation maximale** La défaillance du joint collé est généralement due à des déformations de traction plutôt qu'à des déformations de cisaillement ou de compression. Pour certains adhésifs très ductiles, la déformation à rupture peut dépasser 100%. Pour cette raison, Yarrington, Zhang et Collier utilisent le critère de déformation maximale pour prévenir la rupture de cohésion des adhésifs ductiles [60] [116]. Il est défini par :

$$\frac{\varepsilon_{eqv}}{S_{\max}} = 1 \quad (2.34)$$

Avec,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon_{eqv} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + 6(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2)} \\ \varepsilon_{eqv} &: \text{Déformation équivalente de Von Mises [66]} \\ S_{\max} &: \text{Limite de déformation élastique} \end{array} \right. \quad (2.35)$$

**Critère de contrainte principale maximale** Adams et Harris ont trouvé que l'apparition de la rupture dans les bourrelets de colle en extrémité était due à la contrainte de traction [6]. Pour prévenir ce type de rupture, le critère de contrainte principale maximale est utilisé [126]. Il est défini par :

$$\frac{\sigma_p^{\max}}{F_{\max}} = 1 \quad (2.36)$$

Avec,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma_p^{\max} &: \text{Contrainte principale maximale} \\ F_{\max} &: \text{Contrainte de rupture} \end{array} \right. \quad (2.37)$$

Ce critère de rupture donne de bons résultats lorsque des valeurs moyennes de contraintes sont utilisées [126]. Ce critère a été utilisé avec succès sur des joints à simple recouvrement [85].

**Rupture du plan de joint** Ce phénomène est complexe. Il fait intervenir à la fois de la décohésion et du décollage. Différents critères sont proposés dans la littérature [126]. Yarrington, Zhang et Collier ont retenu celui défini par Tong et Steven [115]. Il est défini par :

$$\begin{cases} \left( \frac{\sigma_{zz}}{F_{peel}} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{xz}}{F_{shear}} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{yz}}{F_{shear}} \right)^2 = 1 & \text{Si } \sigma_{zz} > 0 \\ \left( \frac{\tau_{xz}}{F_{shear}} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{yz}}{F_{shear}} \right)^2 = 1 & \text{Si } \sigma_{zz} < 0 \end{cases} \quad (2.38)$$

Avec,

$$\begin{cases} F_{peel} & : \text{ Contrainte limite de pelage} \\ F_{shear} & : \text{ Contrainte limite de cisaillement} \end{cases} \quad (2.39)$$

Dans le cas d'un cisaillement prédominant, le critère de rupture se réécrit [126] :

$$\frac{\sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}}{F_{shear}} = 1 \quad (2.40)$$

De même, dans le cas d'un effort de pelage prépondérant, le critère de rupture se met sous la forme [126] :

$$\frac{\sigma_{zz}}{F_{peel}} = 1, \text{ Si } \sigma_{zz} > 0 \quad (2.41)$$

**Critère de Gali, Dolev et Ishai** Ce critère est explicité dans la partie précédente. Il a été utilisé par Pandey, Shankaragouda et Singh dans une étude non linéaire prenant en compte le comportement viscoplastique de l'adhésif.

#### 2.4.2.2 Critères de contrainte ou déformation à une certaine distance ou dans une zone

Pour limiter ou contourner la dépendance du maillage pour les critères de rupture précédents, certains chercheurs les ont appliqués à une certaine distance ou sur une zone donnée [85]. C'est le cas du critère de contrainte principale maximale qui donne de bons résultats à une certaine distance du bord. Clarke et McGregor ont développé un critère de rupture basé sur ce dernier qui appliqué à trois types de joint (simple recouvrement, double recouvrement, joint en T) donne de bons résultats. La distance caractéristique est indépendante de la géométrie du joint mais nécessite un étalonnage expérimental. Ce type de critère pose le problème de la détermination de la distance caractéristique qui n'est pas évidente. L'utilisation de méthodes expérimentales pour la calibrer semble donner de bons résultats [85].

#### 2.4.2.3 Choix d'un critère de rupture du joint collé

Il existe un grand choix de critères de rupture. Il est difficile de définir un critère universel pour tous les types de joints. Le choix du critère de rupture est dépendant de la géométrie du joint. En général, un joint collé est conçu pour ne pas être le point faible de l'assemblage. Dans ce cas, le critère de rupture ne sert qu'à vérifier que le joint collé rompt pour un niveau de contrainte appliqué à la structure bien supérieur à celui que peuvent supporter les adhérents [85]. L'utilisation d'un adhésif dans une configuration nouvelle ne semble pas pouvoir s'affranchir d'une calibration expérimentale.

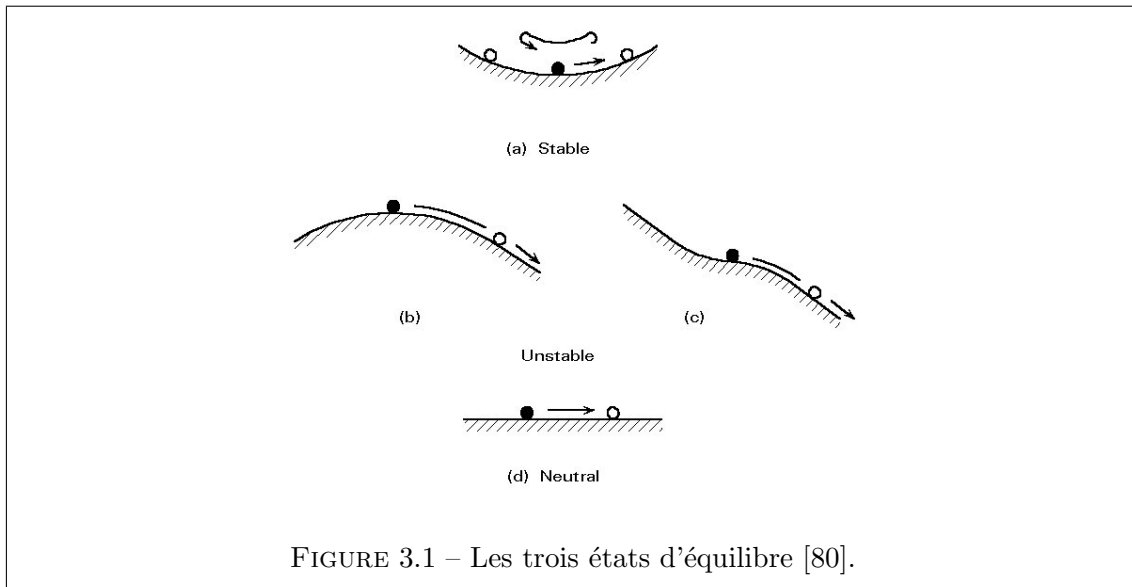
# Chapitre 3

## Le flambage

---

<b>3.1</b>	<b>Principes généraux . . . . .</b>	<b>36</b>
3.1.1	Etats d'équilibre stable et instable . . . . .	36
3.1.2	Energie potentielle minimale . . . . .	36
3.1.3	Bifurcation d'équilibre . . . . .	37
3.1.4	Influence de défauts . . . . .	39
<b>3.2</b>	<b>Flambage des poutres . . . . .</b>	<b>39</b>
3.2.1	La théorie d'Euler . . . . .	40
3.2.2	Généralisation de la théorie d'Euler . . . . .	41
3.2.3	Théorie de Timoshenko . . . . .	42
3.2.3.1	Poutre comprimée avec une force transversale centrée . . . . .	42
3.2.3.2	Autres cas de chargements perturbateurs . . . . .	44

---



### 3.1 Principes généraux

Le travail de cette thèse concerne en partie le calcul des contraintes au sein d'un assemblage collé comprimé. Il a semblé nécessaire de faire un rappel sur les principes généraux du flambage et notamment sur la théorie de Timoshenko qui sert de base au développement du modèle. Les fondements de cette partie sont extraits du travail de Mathon et Maya [79, 80]. Elle a pour objectif d'introduire les concepts d'équilibre, de stabilité et de bifurcation.

#### 3.1.1 Etats d'équilibre stable et instable

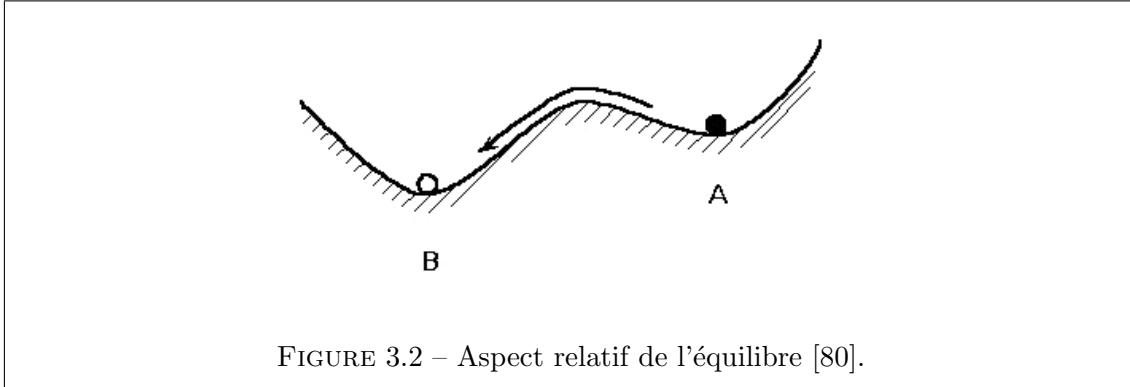
Cette section a pour objectif de rappeler les concepts d'équilibre, de stabilité et de bifurcation. La stabilité se caractérise par la capacité pour un système physique à revenir à sa position initiale lorsqu'il est perturbé légèrement. Dirichlet donne la définition suivante : "L'équilibre d'un système mécanique est stable si, lorsque l'on écarte les points du système de leur position d'équilibre d'une quantité infinitésimale et en leur donnant à chacun d'eux une faible vitesse initiale, les déplacements des différents points du système restent, pendant le déplacement, contenus dans des limites imposées faibles."

La figure 3.1 rapporte l'exemple des billes. Dans le cas (a), si la bille est légèrement éloignée de sa position initiale, elle restera à proximité de son état d'équilibre : l'équilibre est stable. D'autre part, dans le cas (b) et (c), une légère perturbation va conduire à de grands déplacements et de grandes vitesses, l'équilibre est dit instable. Lorsque la bille repose sur un plan horizontal (cas (d)), l'équilibre est neutre ou indifférent.

#### 3.1.2 Energie potentielle minimale

L'illustration de l'état d'équilibre par des billes conduit au concept d'énergie potentielle minimale pour un système : "Un système élastique est en état d'équilibre stable si et seulement si, la valeur de l'énergie potentielle correspond à un minimum relatif." La

figure 3.2 montre la différence entre un minimum relatif ( $A$ ) correspondant à un équilibre métastable et un minimum global ( $B$ ) correspondant à un équilibre stable.



L'état d'équilibre se traduit par l'équation suivante :

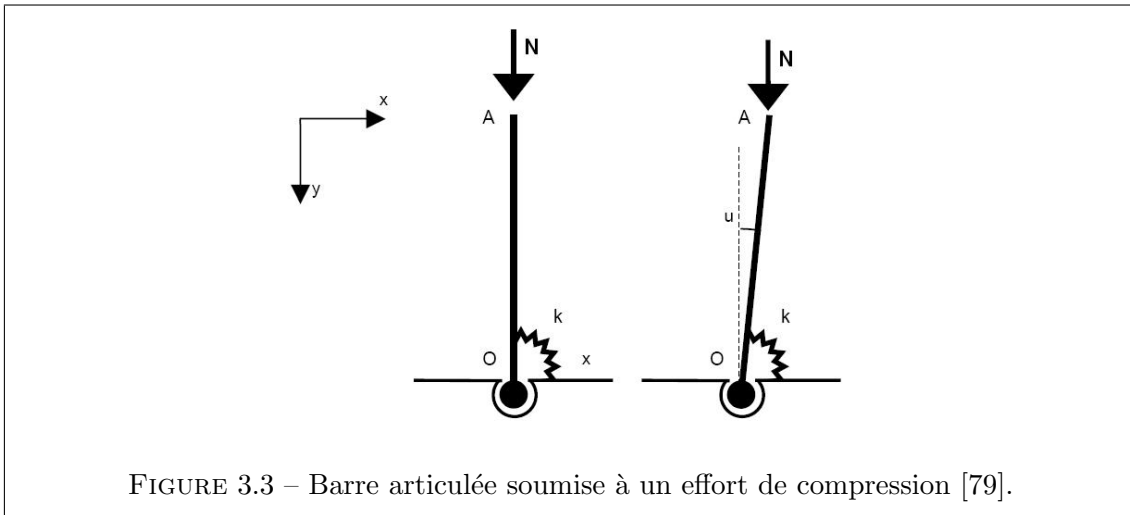
$$\partial\Phi = 0 \quad (3.1)$$

Où  $\Phi$  est l'énergie potentielle totale. Le second ordre permet de définir l'état d'équilibre :

$$\begin{cases} \partial^2\Phi > 0 & \text{Equilibre stable} \\ \partial^2\Phi < 0 & \text{Equilibre instable} \\ \partial^2\Phi = 0 & \text{Equilibre indifférent} \end{cases} \quad (3.2)$$

### 3.1.3 Bifurcation d'équilibre

Le concept de bifurcation d'équilibre peut être illustré par le cas de la barre rigide articulée. Le système mécanique est représenté figure 3.3. En O, la barre est articulée et sur la rotule est fixé un ressort de torsion de raideur  $k$  qui maintient au repos la barre en position verticale. Au point A, une force  $N$  est appliquée.



L'énergie potentielle de ce système s'écrit :

$$\Phi(u, N) = \frac{1}{2} k u^2 + N L \cos(u) \quad (3.3)$$



L'équilibre se traduit par :

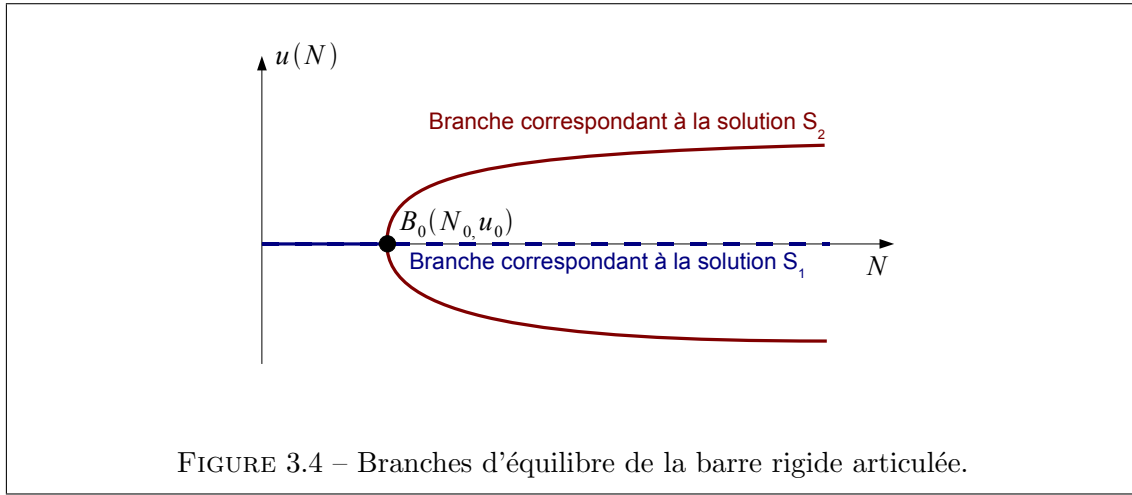
$$\frac{\partial \Phi(u, N)}{\partial u} = k u - N L \sin(u) = 0 \quad (3.4)$$

Dans le cas de petits déplacements, l'équation précédente devient :

$$\frac{\partial \Phi(u, N)}{\partial u} = k u - N L \left[ u - \frac{u^3}{6} \right] = u \left[ k - N L + \frac{N L}{6} u^2 \right] = 0 \quad (3.5)$$

Les solutions sont :

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = \pm \sqrt{6 \left( 1 - \frac{k}{N L} \right)} \end{cases} \quad (3.6)$$



La figure 3.4 représente les solutions admissibles par le système. Le point  $B_0$  est appelé point de bifurcation. Lorsque le chargement dépasse  $N_0$ , le système admet plusieurs états d'équilibre. Il est légitime de s'interroger sur le comportement de la barre lorsque le chargement atteint  $N_0$ . Bien que la solution  $S_1$  reste mathématiquement correcte au delà de  $N_0$ , l'expérience montre que la barre change d'équilibre et bascule sur  $S_2$ . Le système perd sa réponse symétrique. Ce comportement peut être démontré analytiquement en calculant  $\partial^2 \Phi(u, N) / \partial u^2$  :

$$\frac{\partial^2 \Phi(u, N)}{\partial u^2} = k - N L + N L \frac{u^2}{2} \quad (3.7)$$

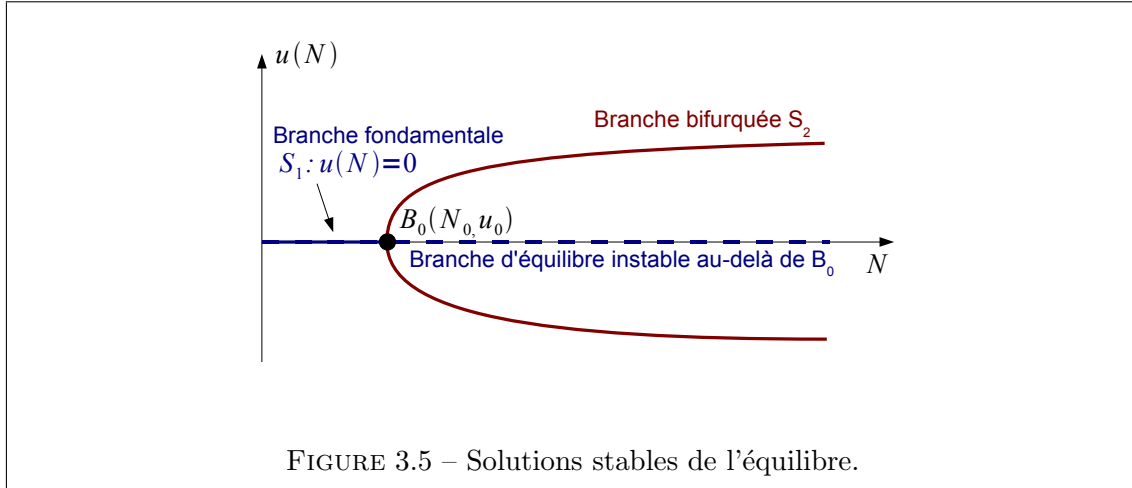
Lorsque  $u$  appartient à  $S_1$ , la condition de stabilité s'écrit :

$$N < \frac{k}{L} \quad (3.8)$$

Lorsque  $u$  appartient à  $S_2$ , la condition de stabilité s'écrit :

$$N > \frac{k}{L} \quad (3.9)$$

La condition de stabilité de  $S_1$  est vérifiée pour  $N < N_0$ . La condition de stabilité de  $S_2$  est vérifiée pour  $N > N_0$ . Il vient ainsi le comportement représenté sur la figure 3.5. Lorsque la barre est sollicitée par un chargement  $N$  monotone croissant, le comportement va tout d'abord suivre la branche fondamentale  $S_1$  jusqu'au point de bifurcation  $B_0$ . Au delà, le comportement bifurque sur  $S_2$ . La barre va choisir la configuration du système qui minimise l'énergie potentielle.



### 3.1.4 Influence de défauts

Dans la réalité, il est rare d'observer un changement brusque de comportement. En général, le système possède des défauts qui brisent dès le début du chargement la symétrie. Ces imperfections ont diverses origines. Singer, Arbocz et Welter les classent en trois groupes, suivant leurs effets [103] :

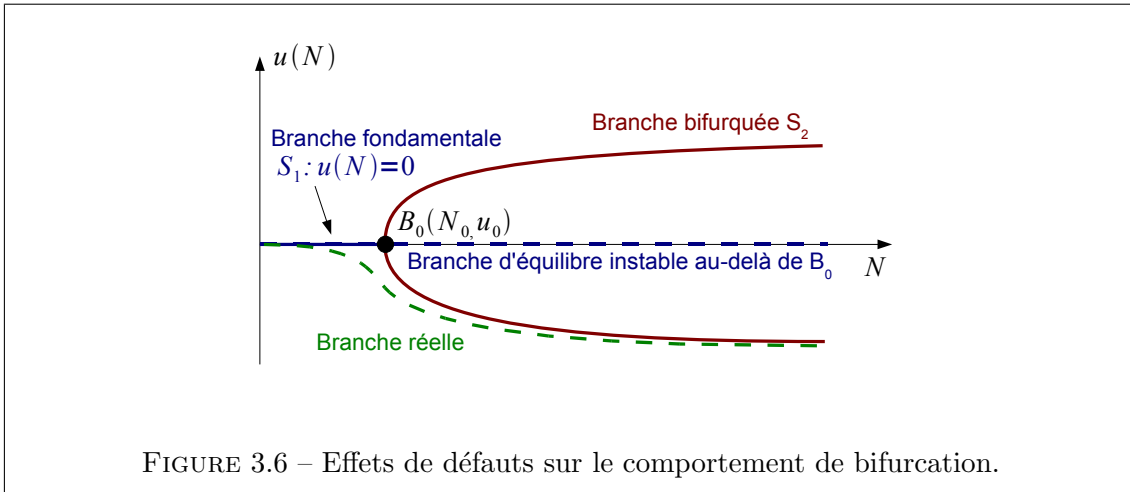
- Chargement excentré : défaut d'alignement, variation de la forme de la section, variation du module d'Young, hétérogénéité du matériau.
- Courbure initiale : Défaut de rectitude, variation du module d'Young.
- Réduction de la résistance du matériau : Forces résiduelles, hétérogénéité du matériau, défauts locaux (comme délamination d'un composite).

Ainsi, le comportement réel de la barre rigide se rapproche davantage de la courbe représentée sur la figure 3.6. La bifurcation n'est plus soudaine mais progressive.

Cette partie a permis d'aborder les concepts primordiaux du flambage permettant d'aborder l'équilibre stable et instable dans les structures. La partie suivante s'intéresse au cas particulier du flambage des poutres. Divers défauts initiaux sont pris en compte afin d'amorcer le flambage.

## 3.2 Flambage des poutres

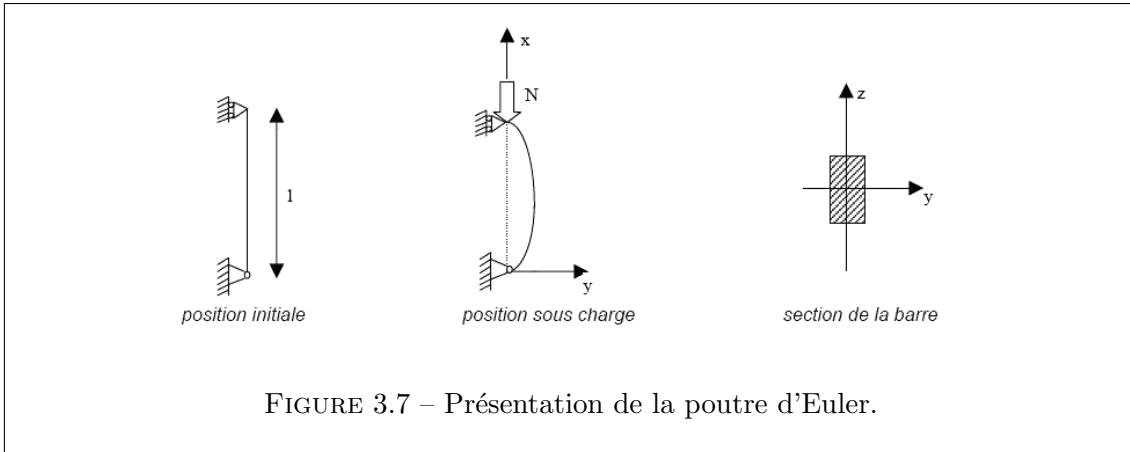
Cette partie rappelle les éléments essentiels de la théorie du flambage des poutres. Dans un premier temps, le cas du flambage d'Euler est présenté. Le modèle de la poutre est supposé parfait. Il permet de déterminer la charge critique de la poutre. En revanche,



seule l'allure de la déformée peut être calculée. Ainsi, Timoshenko introduit dans l'équation d'Euler des défauts d'origine géométrique afin de pouvoir définir le comportement global de la poutre flambée.

### 3.2.1 La théorie d'Euler

La théorie d'Euler correspond à l'étude d'un modèle parfait. La figure 3.7 présente ce modèle.



La poutre est supposée élancée. Elle est composée d'un matériau homogène, isotrope et n'est pas contrainte. La géométrie est supposée parfaite et l'effort  $N$  centré. Le module d'Young est noté  $E$  et le moment d'inertie par rapport à l'axe perpendiculaire au plan de flambement  $I_z$ . Del Pedro, Gmür, Botsis et Laroze présentent l'étude théorique [37, 69]. L'équation différentielle traduisant l'équilibre s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} M &= y N \\ y'' &= -\frac{M}{EI} \\ k^2 &= \frac{N}{EI} \end{aligned} \right\} \Rightarrow y'' + k^2 y = 0 \quad (3.10)$$

La solution est de la forme :

$$y(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx \quad (3.11)$$

Les conditions aux limites donnent :

$$\begin{cases} y(x=0) &= 0 &= C_2 \\ y(x=l) &= 0 &= C_1 \sin kl \end{cases} \quad (3.12)$$

La deuxième condition aux limites est vérifiée pour :

- Soit  $C_1 = 0$  : dans ce cas, la poutre reste rectiligne et stable.
- Soit  $\sin kl = 0$  : permettant de déduire la charge critique d'Euler  $N_{CR}$ .

La charge critique d'Euler du mode  $n$  s'écrit :

$$N_{CR}^n = \frac{\pi^2 EI}{l^2} n^2 \quad (3.13)$$

La figure 3.8 montre les déformées des trois premiers modes de flambage de la poutre bi-articulée.

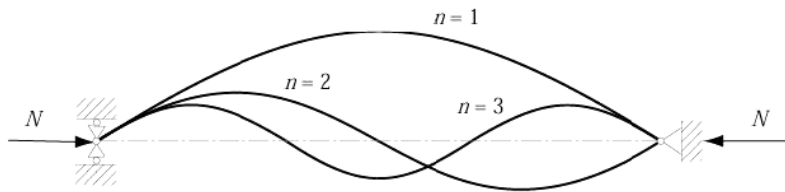


FIGURE 3.8 – Les déformées des trois premiers modes de flambage d'une poutre bi-articulée.

### 3.2.2 Généralisation de la théorie d'Euler

Il est possible d'obtenir la charge critique d'une poutre possédant d'autres conditions aux limites à partir de la formule 3.13 :

$$N_{CR}^n = \frac{\pi^2 EI}{(Kl)^2} n^2 = \frac{\pi^2 EI}{L^2} n^2 \quad (3.14)$$

Avec  $L = Kl$ .  $L$  est appelée longueur réduite de la poutre. Ainsi, les résultats obtenus pour la cas fondamental, peuvent être utilisés pour les autres configurations en utilisant la longueur réduite de la poutre à la place de la longueur réelle. La figure 3.9 rapporte les différentes valeurs de  $K$  pour quelques configurations.




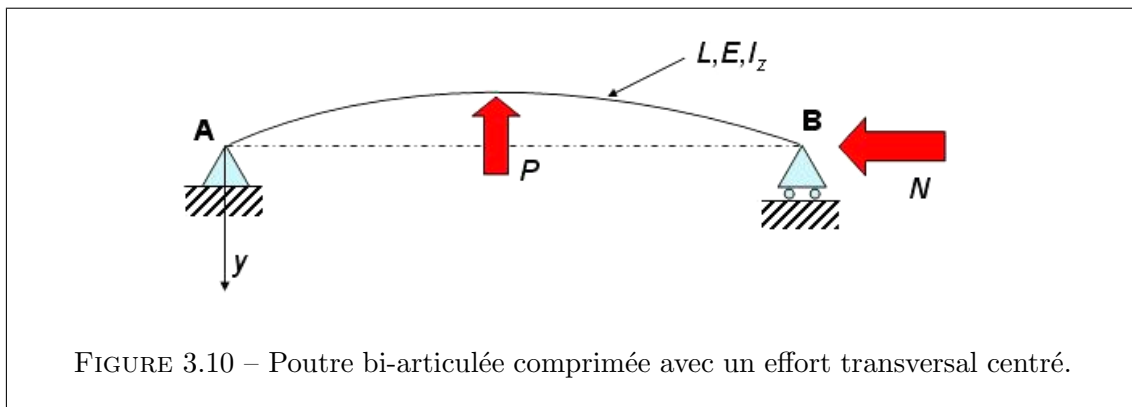
Modèles de flambement idéalisés			
Valeur théorique de K	1,0	0,7	0,5

FIGURE 3.9 – Quelques configurations avec la valeur de  $K$  correspondante pour le calcul de la charge critique.

### 3.2.3 Théorie de Timoshenko

La théorie d'Euler ne permet pas de calculer la flèche générée par la charge  $N$ . Dans [111], différents cas de chargements perturbateurs sont introduits. La première partie reprend le développement conduit dans le cas d'une force perturbatrice  $P$  transversale centrée. Dans une seconde partie, les résultats correspondant à d'autres cas de chargements sont rapportés.

#### 3.2.3.1 Poutre comprimée avec une force transversale centrée



La figure 3.10 présente le modèle. Le raisonnement est détaillé sur la moitié gauche de la poutre. Par symétrie, il est possible de déduire le comportement de la partie droite de la poutre, à partir du comportement de la partie gauche. Compte tenu du moment induit par la force auxiliaire  $P$ , l'équation différentielle décrivant l'équilibre 3.10 devient :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = -\frac{P}{2EI} x \quad (3.15)$$

Avec  $k^2 = \frac{N}{EI}$ . La solution générale s'écrit :

$$y(x) = A \cos kx + B \sin kx - \frac{P}{2N}x \quad (3.16)$$

Les conditions aux limites donnent :

$$\begin{cases} y(x=0) &= 0 = A \\ y'(x=L/2) &= 0 = Bk \cos \frac{kL}{2} - \frac{P}{2N} \end{cases} \quad (3.17)$$

Il vient :

$$y(x) = \frac{P}{2Nk} \left( \frac{\sin kx}{\cos \frac{kL}{2}} - kx \right) \quad (3.18)$$

Il est ainsi possible de calculer la flèche maximale :

$$\delta = y(x=L/2) = \frac{P}{2Nk} \left( \tan \frac{kL}{2} - \frac{kL}{2} \right) \quad (3.19)$$

Pour faciliter cette équation, la notation suivante est utilisée :

$$u = \frac{kL}{2} = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{N}{EI}} \quad (3.20)$$

Alors l'équation 3.19 devient :

$$\delta = \frac{PL^3}{48EI} \frac{3(\tan u - u)}{u^3} = \frac{PL^3}{48EI} \chi(u) \quad (3.21)$$

Lorsque  $u$  est très petit,  $\chi(u)$  tend vers 1. Le facteur  $\frac{PL^3}{48EI}$  correspond à la flèche due à la force perturbatrice  $P$  seule. L'équation 3.21 diverge pour  $u \rightarrow \frac{\pi}{2}$ . En utilisant l'équation 3.20, il vient :

$$N = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (3.22)$$

Cette valeur correspond à la charge critique d'Euler. Elle sera notée  $N_{CR}$ . Lorsque la charge de compression approche de  $N_{CR}$ , même une très petite charge latérale produit de grands déplacements. En utilisant l'équation 3.20,  $u$  se réécrit :

$$u = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{N}{N_{CR}}} \quad (3.23)$$

Ainsi,  $u$  ne dépend que du rapport de  $N/N_{CR}$ . Il vient ensuite la valeur de la courbure et du moment dans la poutre :

$$\rho(x) = -\frac{Pk}{2N} \frac{\sin kx}{\cos \frac{kL}{2}} \quad (3.24)$$

$$M(x) = \frac{PkEI}{2N} \frac{\sin kx}{\cos \frac{kL}{2}} \quad (3.25)$$

Les valeurs maximales correspondantes sont :

$$\rho_{\max} = \rho(x = L/2) = -\frac{PL}{4EI} \frac{\tan u}{u} \quad (3.26)$$

$$M_{\max} = M(x = L/2) = \frac{PL}{4} \frac{\tan u}{u} \quad (3.27)$$

Le facteur  $\frac{PL}{4}$  dans l'équation 3.27, correspond au moment dû à la charge transversale P seule.

### 3.2.3.2 Autres cas de chargements perturbateurs

Le tableau 3.1 récapitule les valeurs de flèche  $y(x)$ , de flèche maximale  $\delta$ , moment de flexion maximal  $M_{\max}$  au sein d'une poutre comprimée suivant son axe longitudinal dans divers cas de chargement perturbateur.

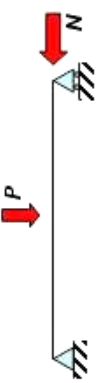
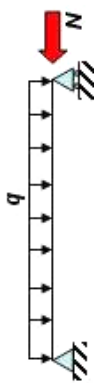

Il est possible d'approximer les formules du tableau 3.1 afin d'obtenir une formule plus simple à utiliser. Dans chacune des configurations du tableau, la flèche maximale  $\delta$  est égale au produit de deux termes. Le premier terme correspond à la flèche obtenue sans la force de compression  $N$ . Le deuxième est un facteur d'amplification ne dépendant que du rapport  $N/N_{CR}$ . Ces facteurs d'amplifications dans ces trois cas sont  $\chi(u)$ ,  $\eta(u)$  et  $\lambda(u)$ . Ces facteurs peuvent être approximatés par la formule suivante :

$$\frac{1}{1 - \frac{N}{N_{CR}}} \quad (3.28)$$

Ainsi, la flèche maximale de la poutre peut se mettre sous la forme :

$$\delta = v_0 \frac{1}{1 - \frac{N}{N_{CR}}} \quad (3.29)$$

Avec  $v_0$  correspondant à la flèche obtenue sans la force compression  $N$ . Cette expression simplifiée a une bonne précision lorsque le ratio  $N/N_{CR}$  n'est pas trop élevé. Pour  $N/N_{CR} = 0.6$ , l'erreur reste inférieure à 2%. Une autre méthode permet de déterminer la charge critique d'une structure : la méthode énergétique. Elle est rappelée dans l'annexe C.

Configuration	$y(x)$	$\delta$	$M_{\max}$
	$\frac{P}{2Nk} \left( \frac{\sin kx}{\cos u} - kx \right)$	$\frac{PL^3}{48EI} \chi(u)$	$\frac{PL}{4} \tan \frac{u}{u}$
	$\frac{qL^4}{16EIu^4} \left[ \frac{\cos(u - 2ux/L)}{\cos u} - 1 \right] - \frac{qL^2}{8EIu^2} x(L - x)$	$\frac{5qL^4}{384EI} \eta(u)$	$\frac{qL^2}{8} \lambda(u)$
	$\frac{M_0 L^2}{8EI} \frac{2}{u^2 \cos u} \left[ \cos \left( u - \frac{2ux}{L} \right) - \cos u \right]$	$\frac{M_0 L^2}{8EI} \lambda(u)$	$\frac{M_0}{\cos u}$

Avec :

$$k^2 = \frac{N}{EI}$$

$$\chi(u) = \frac{3(\tan u - u)}{u^3}$$

$$u = \frac{kL}{2}$$

$$\eta(u) = \frac{12 \left( \frac{2}{\cos u} - 2 - u^2 \right)}{5u^4}$$

$$\lambda(u) = \frac{2(1 - \cos u)}{u^2 \cos u}$$

TABLE 3.1 – Ce tableau récapitule les valeurs de la flèche  $y(x)$ , de la flèche maximale  $\delta$  et du moment de flexion maximal  $M_{\max}$  au sein d'une poutre comprimée suivant son axe longitudinal pour diverses configurations





Deuxième partie

## Développement d'un modèle d'interaction étendu



## Chapitre 4

# Formulation générale du modèle d'interaction

---

<b>4.1</b>	<b>Présentation du modèle et mise en équations . . . . .</b>	<b>50</b>
4.1.1	Rappel sur les tenseurs de contraintes dans l'hypothèse des grands déplacements . . . . .	50
4.1.1.1	Définition des tenseurs . . . . .	50
4.1.1.2	Conditions aux limites . . . . .	51
4.1.2	Hypothèses cinématiques . . . . .	51
4.1.3	Les champs de déformation . . . . .	52
4.1.3.1	Au sein des adhérents . . . . .	52
4.1.3.2	Au sein de l'adhésif . . . . .	52
4.1.4	Les champs de contrainte . . . . .	53
4.1.5	Les forces et moments résultants . . . . .	54
4.1.6	L'équilibre statique local . . . . .	54
4.1.7	La mise en équations du problème . . . . .	55
4.1.7.1	Equation différentielle en $\sigma(x)$ . . . . .	55
4.1.7.2	Equation différentielle en $\tau(x)$ . . . . .	56
<b>4.2</b>	<b>Résolution dans le cas général . . . . .</b>	<b>56</b>
4.2.1	Le système différentiel . . . . .	56
4.2.2	Solution complète . . . . .	57
<b>4.3</b>	<b>Solution simplifiée . . . . .</b>	<b>59</b>

---

## 4.1 Présentation du modèle et mise en équations

Cette partie présente le développement d'un modèle analytique pour la détermination des contraintes dans le joint de colle en tenant compte de la déformation transversale du joint et des effets du second ordre dans les structures flexibles. La méthode proposée est très générale et ne dépend pas des conditions aux limites. Ces dernières n'interviennent qu'à la fin de la résolution pour identifier les constantes d'intégration apparaissant dans les solutions des équations différentielles rendues homogènes.

### 4.1.1 Rappel sur les tenseurs de contraintes dans l'hypothèse des grands déplacements

#### 4.1.1.1 Définition des tenseurs

Dans le cas général de l'analyse des milieux continus, différents tenseurs de contraintes peuvent être définis, suivant le référentiel dans lequel ils sont calculés [22].

- $\pi$  est le tenseur de Cauchy. Il désigne la contrainte vraie. Il est calculé sur la surface en configuration déformée.
- $\Pi$  est le premier tenseur de Piola-Kirchhoff. Il désigne la contrainte nominale. Il est calculé sur la surface en configuration initiale.

Dans l'hypothèse des petits déplacements, ces tenseurs sont confondus. On note  $\pi^{\text{local}}$  le tenseur de Cauchy exprimé dans le repère local. La matrice de rotation  $R$ , définie par l'équation 4.1, permet d'exprimer le tenseur de Cauchy dans le repère global,  $\pi^{\text{global}}$ .

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \left(\frac{dw_0}{dx}\right)^2 & -2\frac{dw_0}{dx} \\ \left(\frac{dw_0}{dx}\right)^2 & 1 & 2\frac{dw_0}{dx} \\ \frac{dw_0}{dx} & -\frac{dw_0}{dx} & 1 - \left(\frac{dw_0}{dx}\right)^2 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Ainsi, les composantes du tenseur de Cauchy utilisées dans la suite de ce travail s'expriment de la manière suivante dans le repère global :

$$\pi_z^{\text{global}} = \left(\frac{dw_0}{dx}\right)^2 \pi_x^{\text{local}} + \pi_z^{\text{local}} + 2\frac{dw_0}{dx} \pi_{xz}^{\text{local}} \quad (4.2)$$

$$\pi_{xz}^{\text{global}} = \left(\frac{dw_0}{dx}\right) \pi_x^{\text{local}} - \left(\frac{dw_0}{dx}\right) \pi_z^{\text{local}} + \left(1 - \left[\frac{dw_0}{dx}\right]^2\right) \pi_{xz}^{\text{local}} \quad (4.3)$$

A partir des définitions des tenseurs  $\pi$  et  $\Pi$ , il est possible d'écrire la relation suivante [22] :

$$\Pi = J\pi F^{-T} \quad (4.4)$$

avec :

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + 1 & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial z} + 1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

et

$$J = \det F = 1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4.6)$$

Afin d'alléger les notations dans la suite du document, en l'absence de l'exposant "global" les tenseurs sont exprimés dans le repère local. Ainsi,  $\sigma$  signifie  $\sigma^{\text{local}}$  et  $\tau$  signifie  $\tau^{\text{local}}$ .

#### 4.1.1.2 Conditions aux limites

Pour exprimer les conditions aux limites de type statique, l'un ou l'autre de ces deux tenseurs peut être utilisé suivant la manière dont les efforts appliqués varient avec la géométrie du solide. Dans les configurations étudiées, deux cas doivent être différenciés :

- Lorsque les efforts sont définis par rapport à la surface initiale, les conditions aux limites sont exprimées à l'aide du premier tenseur de Piola-Kirchhoff. C'est le cas d'une charge morte ou d'une charge répartie.
- Au contraire, lorsque les efforts sont exprimés dans la configuration déformée, les conditions aux limites s'écrivent avec le tenseur de Cauchy. C'est le cas d'un chargement exercé par l'intermédiaire d'un fluide. On parle de forces suiveuses.

Dans la suite de l'étude, seul le cas de la charge répartie est retenu.

#### 4.1.2 Hypothèses cinématiques

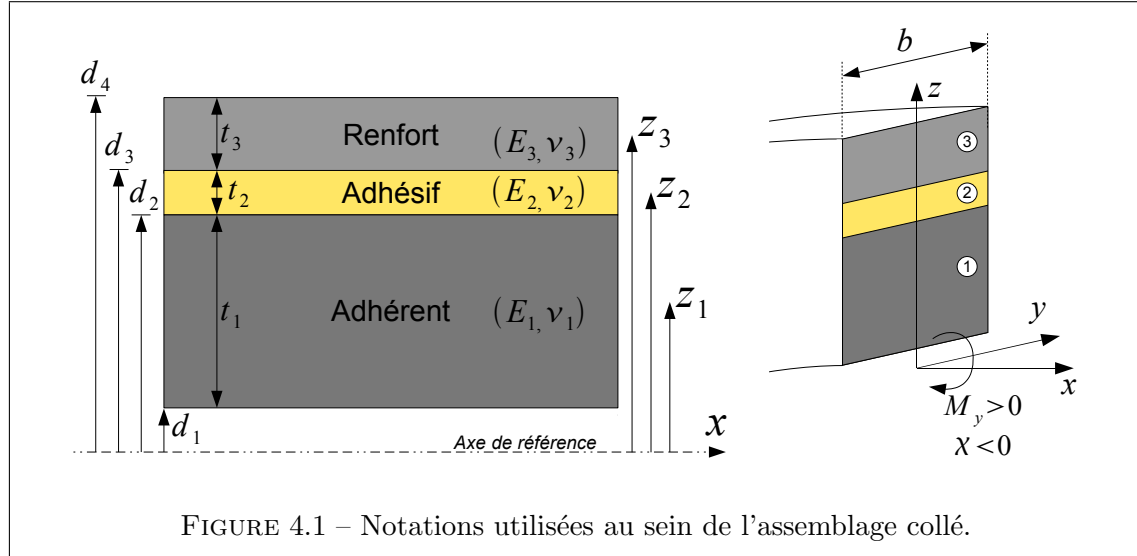


FIGURE 4.1 – Notations utilisées au sein de l'assemblage collé.

La figure 4.1 présente les notations utilisées dans cette étude analytique. La section est constituée d'un renfort et d'un adhérent reliés par une fine couche d'adhésif. Les déplacements sont notés  $u(x, z)$  et  $w(x, z)$  respectivement suivant l'axe  $x$  et l'axe  $z$ . Les deux composantes du déplacement sont supposées varier linéairement suivant l'épaisseur comme suit [106] [128] :

$$\forall z \in [d_i, d_{i+1}], \begin{cases} u(x, z) = u_i(x) + (z - z_i) \frac{\Delta u_i}{t_i} \\ w(x, z) = w_i(x) + (z - z_i) \frac{\Delta w_i}{t_i} \end{cases} \quad (4.7)$$

avec,

$$\begin{cases} \Delta u_i = u(x, d_{i+1}) - u(x, d_i) \\ \Delta w_i = w(x, d_{i+1}) - w(x, d_i) \end{cases} \quad (4.8)$$

$u_i(x)$  and  $w_i(x)$  sont les composantes du déplacement au centre mécanique (confondu avec le centre géométrique pour un composant homogène) du composant  $i$ .  $z_i$  représente la position du centre mécanique de l'élément  $i$  repéré par rapport à l'axe de référence de la section.

### 4.1.3 Les champs de déformation

#### 4.1.3.1 Au sein des adhérents

Le cadre visé par l'utilisation du modèle analytique permet de faire l'hypothèse que les rigidités des adhérents sont très supérieures à la rigidité du film d'adhésif. Sous cette hypothèse, le cisaillement des adhérents est supposé négligeable dans la suite du développement. En se référant à la théorie des poutres droites,  $\Delta u_i$  dans l'équation 4.7 peut s'écrire en fonction de la courbure de la section calculée au centre mécanique de l'élément  $i$ ,

$$\Delta u_i = -\frac{dw_i}{dx} t_i \quad , \quad i \in \{1, 3\} \quad (4.9)$$

De la même manière, la déformation transverse des adhérents est supposée négligeable, ainsi,

$$\Delta w_i = 0 \quad , \quad i \in \{1, 3\} \quad (4.10)$$

Compte tenu de l'ensemble de ces hypothèses, la déformation longitudinale s'obtient à partir des équations Eq.4.7 et Eq.4.9 pour chacun des deux adhérents :

$$\forall z \in [d_i, d_{i+1}], \varepsilon_x(x, z) = \frac{\partial u(x, z)}{\partial x} = \frac{du_i}{dx} - (z - z_i) \chi_i(x) \quad , \quad i \in \{1, 3\} \quad (4.11)$$

avec  $\chi_i(x) = w_i''(x)$  désignant la courbure à l'abscisse  $x$  du composant  $i$ .

#### 4.1.3.2 Au sein de l'adhésif

Au sein de l'adhésif,  $\Delta u_2$  dans l'équation 4.7 s'écrit

$$\Delta u_2 = u(x, d_3) - u(x, d_2) \quad (4.12)$$

En supposant la continuité des déplacements à l'interface entre l'adhésif et l'adhérent, et en substituant les équations 4.7 et 4.9 dans l'expression précédente, il vient,

$$\Delta u_2 = u_3(x) - u_1(x) + \frac{1}{2} \left( \frac{dw_1}{dx} t_1 + \frac{dw_3}{dx} t_3 \right) \quad (4.13)$$

De la même manière, en utilisant les équations 4.7 et 4.10, la flèche exprimée au centre mécanique de l'adhésif s'écrit :

$$w_2(x) = w_1(x) + \frac{\Delta w_2}{2} = w_3(x) - \frac{\Delta w_2}{2} \quad (4.14)$$

Ainsi,

$$\begin{cases} w_2(x) = \frac{1}{2} (w_1(x) + w_3(x)) \\ \Delta_2 = w_3(x) - w_1(x) \end{cases} \quad (4.15)$$

Finalement, les déformations transversales  $\varepsilon_z(x)$  et de cisaillement  $\gamma(x)$  exprimées au centre mécanique de l'adhésif, sont obtenues en dérivant les équations 4.7, 4.13 et 4.15. Elles s'écrivent,

$$\varepsilon_z(x) = \frac{\partial w(x, z)}{\partial z} = \frac{\Delta w_2}{t_2} \quad (4.16)$$

soit,

$$\varepsilon_z(x) = \frac{w_3(x) - w_1(x)}{t_2} \quad (4.17)$$

et

$$\gamma(x) = \frac{\partial u(x, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, z)}{\partial x} = \frac{\Delta u_2}{t_2} + \frac{dw_2}{dx} \quad (4.18)$$

qui se met sous la forme,

$$\gamma(x) = \frac{1}{t_2} \left[ u_3 - u_1 + \frac{t_3 + t_2}{2} \frac{dw_3}{dx} + \frac{t_1 + t_2}{2} \frac{dw_1}{dx} \right] \quad (4.19)$$

#### 4.1.4 Les champs de contrainte

Dans le cas de structures collées constituées de matériaux différents, une variation de température peut induire des déformations différentielles entraînant des contraintes d'origine thermique au sein de l'assemblage. Pour intégrer cet effet, tous les composants de l'assemblage sont supposés suivre un comportement thermo-élastique linéaire dans le domaine d'utilisation de la structure. Les lois de comportement sont définies par le module d'Young  $E_i$ , par le coefficient de Poisson  $\nu_i$  et par le coefficient de dilatation thermique  $\alpha_i$  de l'élément  $i$ . Ainsi la contrainte longitudinale dans la section de chaque adhérent s'écrit,

$$\forall z \in [d_i, d_{i+1}], \sigma_x(x, z) = \tilde{E}_i [\varepsilon_x(x, z) - \alpha_i \Delta T] \quad (4.20)$$

expression dans laquelle  $\varepsilon_x(x, z)$  est donné par l'équation 4.11.  $\Delta T$  correspond à la variation de température. De la même manière, les contraintes normale transverse  $\sigma(x)$  et de cisaillement  $\tau(x)$  au milieu de l'adhésif s'obtiennent à partir des équations 4.17 et 4.19,

$$\begin{cases} \tau = k_s \left[ u_3 - u_1 + \frac{t_3 + t_2}{2} \frac{dw_3}{dx} + \frac{t_1 + t_2}{2} \frac{dw_1}{dx} \right], \text{ avec } k_s = \frac{G_2}{t_2} \\ \sigma = k_p [w_3 - w_1] - \tilde{E}_2 \alpha_2 \Delta T, \text{ avec } k_p = \frac{\tilde{E}_2}{t_2} \end{cases} \quad (4.21)$$

avec,

$$\begin{cases} \tilde{E}_i = E_i & (\text{contrainte plane}) \\ \tilde{E}_i = \frac{E_i}{1 - \nu_i^2} & (\text{déformation plane}) \end{cases} \quad (4.22)$$

Dans le cas où la différence de dilatation thermique entre les adhérents est négligeable ou si la température ne varie pas, les effets thermiques peuvent être omis (i.e.  $\Delta T = 0$ ).



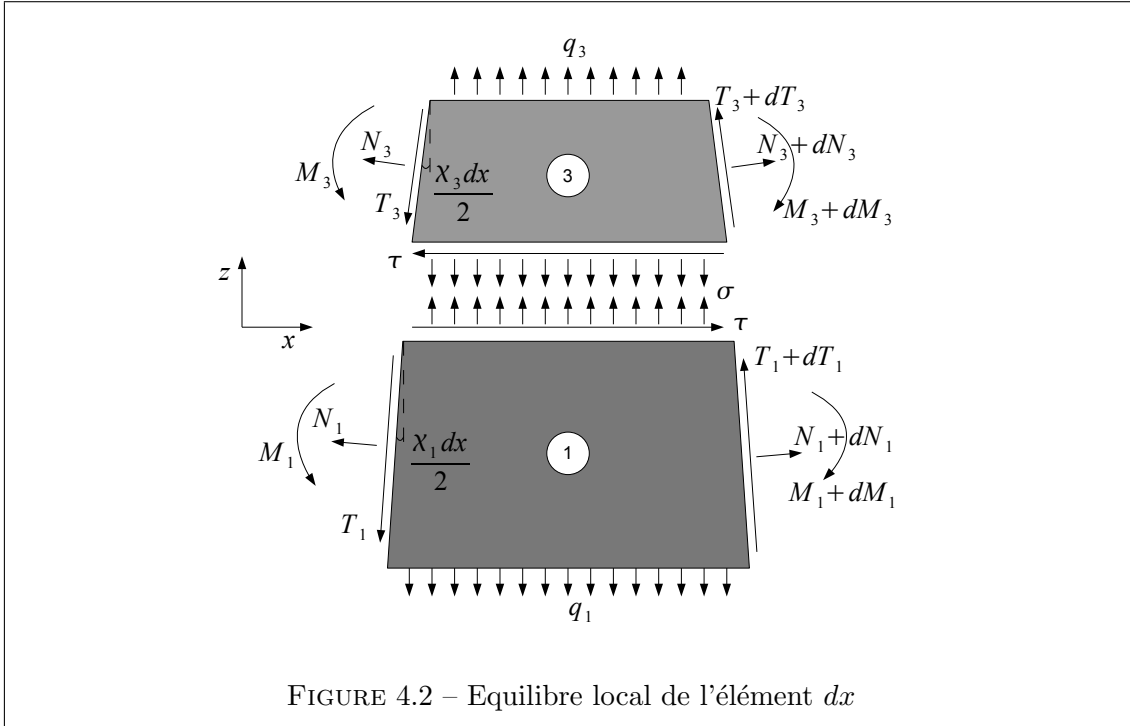
#### 4.1.5 Les forces et moments résultants

Les forces et moments élémentaires résultants supportés par les constituants de l'assemblage sont obtenus en intégrant la contrainte  $\sigma_x$  dans chaque élément suivant l'épaisseur [18, 74, 109],

$$\begin{cases} N_i = \int_{\Omega_i} \sigma_x d\Omega = \tilde{A}_i \varepsilon_i = \tilde{A}_i \frac{du_i}{dx} - \tilde{A}_i \alpha_i \Delta T \\ M_i = \int_{\Omega_i} (z - z_i) \sigma_x d\Omega = -\tilde{D}_i \chi_i = -\tilde{D}_i \frac{d^2 w_i}{dx^2} \end{cases} \quad (4.23)$$

$$\tilde{D}_i = \frac{\tilde{E}_i b t_i^3}{12} \quad \text{et} \quad \tilde{A}_i = \tilde{E}_i b t_i \quad (4.24)$$

#### 4.1.6 L'équilibre statique local



La figure 4.2 présente l'équilibre statique local d'un élément  $dx$  de l'assemblage. Il prend en compte un chargement transverse sur les faces extérieures de l'assemblage ( $q_3(x)$  sur la surface supérieure et  $q_1(x)$  sur la surface inférieure). Dans le cas d'une structure élancée, les effets du second ordre dus à la flexion de l'ensemble sont pris en compte par le biais des courbures  $\chi_1$  et  $\chi_3$  des deux adhérents qui ne sont pas nécessairement égales. En isolant chacun des adhérents, il vient les équations suivantes :

– adhérent n°3 :

$$\frac{dN_3}{dx} = b\tau + \chi_3 T_3 \quad (4.25)$$

$$\frac{dT_3}{dx} = -q_3 + b\sigma - \chi_3 N_3 \quad (4.26)$$

$$\frac{dM_3}{dx} = T_3 - \frac{bt_3}{2}\tau \quad (4.27)$$

– adhérent n°1 :

$$\frac{dN_1}{dx} = -b\tau + \chi_1 T_1 \quad (4.28)$$

$$\frac{dT_1}{dx} = q_1 - b\sigma - \chi_1 N_1 \quad (4.29)$$

$$\frac{dM_1}{dx} = T_1 - \frac{bt_1}{2}\tau \quad (4.30)$$

Il est à noter que dans le cas d'un adhérent rigide, pour lequel la flexion peut être négligée, les termes  $\chi_1(x)$  et  $\chi_3(x)$  peuvent être négligés.

#### 4.1.7 La mise en équations du problème

A partir des équations précédentes, un système d'équations différentielles fonction des inconnues  $\sigma(x)$  et  $\tau(x)$  peut être établi comme suit.

##### 4.1.7.1 Equation différentielle en $\sigma(x)$

En différenciant quatre fois l'équation 4.21, la dérivée quatrième de la contrainte normale transverse s'écrit :

$$\frac{d^4\sigma}{dx^4} = k_p \left[ \frac{d^4 w_3}{dx^4} - \frac{d^4 w_1}{dx^4} \right] \quad (4.31)$$

En substituant les équations 4.23, il vient :

$$\frac{d^4\sigma}{dx^4} = k_p \left[ -\frac{1}{\tilde{D}_3} \frac{d^2 M_3}{dx^2} + \frac{1}{\tilde{D}_1} \frac{d^2 M_1}{dx^2} \right] \quad (4.32)$$

Puis en introduisant les équations d'équilibre statique exprimées précédemment, l'équation différentielle définissant la contrainte de pelage s'exprime finalement comme suit :

$$\frac{d^4\sigma}{dx^4} + 4\lambda_\sigma^4 \sigma = g_\sigma(x) \quad (4.33)$$

avec,

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_\sigma^4 = \frac{bk_p}{4} \left[ \frac{1}{\tilde{D}_3} + \frac{1}{\tilde{D}_1} \right] \\ g_\sigma(x) = k_p \left[ \frac{q_3}{\tilde{D}_3} + \frac{q_1}{\tilde{D}_1} \right] + \frac{bk_p}{2} \left[ \frac{t_3}{\tilde{D}_3} - \frac{t_1}{\tilde{D}_1} \right] \frac{d\tau}{dx} \\ \quad + k_p \left[ \frac{\chi_3 N_3}{\tilde{D}_3} - \frac{\chi_1 N_1}{\tilde{D}_1} \right] \end{array} \right. \quad (4.34)$$

Le terme  $k_p \left[ \frac{\chi_3 N_3}{\tilde{D}_3} - \frac{\chi_1 N_1}{\tilde{D}_1} \right]$  correspond à l'influence des grands déplacements (effet de courbure). Lorsqu'il est possible de faire l'hypothèse des petits déplacements (adhérents rigides), ce terme peut être négligé.

#### 4.1.7.2 Equation différentielle en $\tau(x)$

En différenciant trois fois l'équation 4.21 et en tenant compte des équations 4.23, la dérivée troisième de la contrainte de cisaillement s'écrit :

$$\frac{d^3\tau}{dx^3} = k_s \left[ \frac{1}{\tilde{A}_3} \frac{d^2 N_3}{dx^2} - \frac{1}{\tilde{A}_1} \frac{d^2 N_1}{dx^2} - \frac{t_3 + t_2}{2} \frac{1}{\tilde{D}_3} \frac{d^2 M_3}{dx^2} - \frac{t_1 + t_2}{2} \frac{1}{\tilde{D}_1} \frac{d^2 M_1}{dx^2} \right] \quad (4.35)$$

De la même manière que pour l'équation différentielle précédente, en combinant avec les équations 4.25, 4.26, 4.27, 4.28, 4.29 et 4.30, l'équation différentielle définissant la contrainte de cisaillement dans l'adhésif se met sous la forme suivante :

$$\frac{d^3\tau}{dx^3} - \lambda_\tau^2 \frac{d\tau}{dx} = g_\tau(x) \quad (4.36)$$

avec,

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_\tau^2 = bk_s \left[ \frac{1}{\tilde{A}_3} + \frac{1}{\tilde{A}_1} + \frac{t_3(t_3 + t_2)}{4\tilde{D}_3} + \frac{t_1(t_1 + t_2)}{4\tilde{D}_1} \right] \\ g_\tau(x) = -bk_s \left[ \frac{t_3 + t_2}{2\tilde{D}_3} - \frac{t_1 + t_2}{2\tilde{D}_1} \right] \sigma(x) \\ \quad + k_s \frac{t_3 + t_2}{2\tilde{D}_3} q_3 - k_s \frac{t_1 + t_2}{2\tilde{D}_1} q_1 \\ \quad + k_s \frac{t_3 + t_2}{2\tilde{D}_3} \chi_3 N_3 + k_s \frac{t_1 + t_2}{2\tilde{D}_1} \chi_1 N_1 \end{array} \right. \quad (4.37)$$

$k_s \frac{t_3 + t_2}{2\tilde{D}_3} \chi_3 N_3 + k_s \frac{t_1 + t_2}{2\tilde{D}_1} \chi_1 N_1$  correspond à l'influence des grands déplacements. Comme pour la contrainte de pelage, s'il est possible de faire l'hypothèse des petits déplacements (adhérents rigides), ce terme peut être négligé.

## 4.2 Résolution dans le cas général

### 4.2.1 Le système différentiel

La partie précédente a permis de poser le système différentiel couplé suivant :

$$\begin{aligned} \frac{d^4\sigma}{dx^4} + 4\lambda_\sigma^4 \sigma = & k_p \left[ \frac{q_3}{\tilde{D}_3} + \frac{q_1}{\tilde{D}_1} \right] + \frac{bk_p}{2} \left[ \frac{t_3}{\tilde{D}_3} - \frac{t_1}{\tilde{D}_1} \right] \frac{d\tau}{dx} \\ & + \varphi k_p \left[ \frac{\chi_3 N_3}{\tilde{D}_3} - \frac{\chi_1 N_1}{\tilde{D}_1} \right] \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3\tau}{dx^3} - \lambda_\tau^2 \frac{d\tau}{dx} = & -bk_s \left[ \frac{t_3 + t_2}{2\tilde{D}_3} - \frac{t_1 + t_2}{2\tilde{D}_1} \right] \sigma(x) \\ & + k_s \frac{t_3 + t_2}{2\tilde{D}_3} q_3 - k_s \frac{t_1 + t_2}{2\tilde{D}_1} q_1 \\ & + \varphi k_s \left[ \frac{t_3 + t_2}{2\tilde{D}_3} \chi_3 N_3 + \frac{t_1 + t_2}{2\tilde{D}_1} \chi_1 N_1 \right] \end{aligned} \quad (4.39)$$

Dans ce système différentiel, les inconnues  $\sigma(x)$  et  $\tau(x)$  font référence aux composantes du tenseur de Cauchy exprimé dans le repère local au milieu de l'adhésif (Cf. 4.1.1.1). La

dépendance du second terme de l'équation 4.38 vis-à-vis de  $\tau(x)$  (au travers de  $\frac{d\tau}{dx}$ ) et de l'équation 4.39 vis-à-vis de  $\sigma(x)$  met en évidence un effet de couplage entre la contrainte normale transverse et la contrainte de cisaillement dans l'adhésif. Les termes de courbure  $\chi_1$  et  $\chi_3$  présents dans les deux équations rendent compte des effets du second ordre dus à la flexion locale des deux adhérents. Si un des adhérents possède une rigidité très supérieure à l'autre, les effets du second ordre peuvent être négligés. Pour cette raison, un paramètre  $\varphi$  a été introduit avec les valeurs possibles suivantes :  $\varphi = 1$  permet de prendre en compte les effets du second ordre,  $\varphi = 0$  dans le cas contraire. Afin de faciliter la résolution du système différentiel précédent, les  $N_i$  sont approximés par leur valeur en zone courante. Ainsi, les termes  $\chi_i N_i$  référant à chacun des adhérents dans les équations 4.38 et 4.39 sont approximés par  $\chi_0 \tilde{E}_i b t_i [\varepsilon_0 - (z_i - z_0) \chi_0]$ , où  $\chi_0$  est la courbure et  $\varepsilon_0$  est la déformation longitudinale de la section homogène équivalente pour le même chargement.

### 4.2.2 Solution complète

Moyennant l'approximation précédente, la résolution du système différentiel conduit aux formes générales suivantes pour la contrainte normale transverse  $\sigma(x)$  et la contrainte de cisaillement  $\tau(x)$  au sein de l'adhésif :

$$\begin{aligned} \sigma(x) = & \sigma_{sp}(x) + e^{-\lambda_\sigma x} (a_\sigma \cos \lambda_\sigma x + b_\sigma \sin \lambda_\sigma x) \\ & + e^{\lambda_\sigma x} (c_\sigma \cos \lambda_\sigma x + d_\sigma \sin \lambda_\sigma x) \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\tau(x) = \tau_{sp}(x) + a_\tau + b_\tau e^{-\lambda_\tau x} + c_\tau e^{\lambda_\tau x} \quad (4.41)$$

$a_\sigma$ ,  $b_\sigma$ ,  $c_\sigma$  et  $d_\sigma$  sont des constantes d'intégration qui dépendent des conditions aux limites pour la contrainte normale transverse.  $a_\tau$ ,  $b_\tau$  et  $c_\tau$  sont des constantes d'intégration qui dépendent des conditions aux limites pour la contrainte de cisaillement.  $\sigma_{sp}(x)$  et  $\tau_{sp}(x)$  sont les solutions particulières des deux équations différentielles avec leurs seconds membres.

La forme de ces solutions est générale ; elle dépend de la configuration géométrique et du chargement au travers des sept constantes et des deux solutions particulières. Elle peut être adaptée à différentes structures comme les joints à simple ou double recouvrement, aux structures renforcées par renforts collés,... par l'introduction des conditions aux limites correspondantes. Dans la suite de cette partie, la méthode générale permettant d'obtenir la solution est décrite.

Quelle que soit la configuration retenue, les solutions particulières  $\sigma_{sp}(x)$  et  $\tau_{sp}(x)$  sont mises sous la forme,

$$\begin{cases} \sigma_{sp}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{2L_r} \\ \tau_{sp}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \frac{n\pi x}{2L_r} \end{cases} \quad (4.42)$$

En substituant  $\sigma_{sp}(x)$  et  $\tau_{sp}(x)$  dans les équations 4.38 et 4.39, il vient,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 \pi^4}{16L_r^4} A_n \sin \frac{n\pi x}{2L_r} + 4\lambda_\sigma^4 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{2L_r} \\ & = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{2L_r} - m_\tau \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{2L_r} B_n \sin \frac{n\pi x}{2L_r} \end{aligned} \quad (4.43)$$

avec,

$$\left\{ \begin{array}{l} C_0 = f_\sigma(0) \text{ et } C_n = \frac{1}{L_r} \int_0^{2L_r} [f_\sigma(x) - f_\sigma(0)] \sin \frac{n\pi x}{2L_r} dx \\ f_\sigma(x) = k_p \left[ \frac{q_3}{\tilde{D}_3} + \frac{q_1}{\tilde{D}_1} \right] + m_\tau \lambda_\tau (c_\tau e^{\lambda_\tau x} - b_\tau e^{-\lambda_\tau x}) \\ \quad + \varphi k_p \left[ \frac{\chi_3 N_3}{\tilde{D}_3} - \frac{\chi_1 N_1}{\tilde{D}_1} \right] \\ m_\tau = \frac{bk_p}{2} \left[ \frac{t_3}{\tilde{D}_3} - \frac{t_1}{\tilde{D}_1} \right] \end{array} \right. \quad (4.44)$$

et

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \pi^3}{8L_r^3} B_n \sin \frac{n\pi x}{2L_r} + \lambda_\tau^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{2L_r} B_n \sin \frac{n\pi x}{2L_r} \\ & = D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{n\pi x}{2L_r} - m_\sigma \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{2L_r} \end{aligned} \quad (4.45)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} D_0 = f_\tau(0) \text{ et } D_n = \frac{1}{L_r} \int_0^{2L_r} [f_\tau(x) - f_\tau(0)] \sin \frac{n\pi x}{2L_r} dx \\ f_\tau(x) = k_s \frac{t_3 + t_2}{2\tilde{D}_3} q_3 - k_s \frac{t_1 + t_2}{2\tilde{D}_1} q_1 \\ \quad - m_\sigma \left[ e^{-\lambda_\sigma x} (a_\sigma \cos \lambda_\sigma x + b_\sigma \sin \lambda_\sigma x) \right. \\ \quad \left. + e^{\lambda_\sigma x} (c_\sigma \cos \lambda_\sigma x + d_\sigma \sin \lambda_\sigma x) \right] \\ \quad + \varphi k_s \left[ \frac{t_3 + t_2}{2\tilde{D}_3} \chi_3 N_3 + \frac{t_1 + t_2}{2\tilde{D}_1} \chi_1 N_1 \right] \\ m_\sigma = bk_s \left[ \frac{t_3 + t_2}{2\tilde{D}_3} - \frac{t_1 + t_2}{2\tilde{D}_1} \right] \end{array} \right. \quad (4.46)$$

La présence de termes en  $e^{\lambda_\tau x}$  et  $e^{\lambda_\sigma x}$  dans  $f_\tau(x)$  et  $f_\sigma(x)$  nécessite de considérer un très grand nombre de termes dans le calcul des séries  $\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{2L_r}$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{n\pi x}{2L_r}$  pour que ces dernières convergent. Les séries permettent la prise en compte du couplage entre le cisaillement et le pelage tout au long de la zone de recouvrement. Or pour certains types de chargement, il est possible de faire l'hypothèse que le couplage entre le cisaillement et le pelage reste localisé aux extrémités. L'influence des termes en  $e^{\lambda_\tau x}$  est localisée du côté de l'extrémité droite la plage de recouvrement étudié ( $e^{-\lambda_\tau x}$  a une influence sur le côté gauche). Lorsque le couplage entre le cisaillement et le pelage est supposé négligeable dans cette zone, ces termes peuvent être supprimés (Cf. 5.2). Les deux équations 4.43 et 4.45, en utilisant la transformée de la fonction échelon,

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n \sin \frac{n\pi x}{2L_r} = 1, \text{ pour } x \in ]0, 2L_r[ \quad (4.47)$$

avec,

$$T_n = \frac{1}{L_r} \int_0^{2L_r} \sin \frac{n\pi x}{2L_r} dx = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.48)$$

se simplifient et donnent un système à deux inconnues  $A_n$  et  $B_n$  qui s'écrit,

$$\begin{cases} \frac{n^4 \pi^4}{16L_r^4} A_n + 4\lambda_\sigma^4 A_n = C_0 T_n + C_n - m_\tau \frac{n\pi}{2L_r} B_n \\ \frac{n^3 \pi^3}{8L_r^3} B_n + \lambda_\tau^2 \frac{n\pi}{2L_r} B_n = D_0 T_n + D_n - m_\sigma A_n \end{cases} \quad (4.49)$$

Finalement,

$$\begin{cases} A_n = \frac{\left( \frac{n^2 \pi^2}{4L_r^2} + \lambda_\tau^2 \right) (C_0 T_n + C_n) - m_\tau (D_0 T_n + D_n)}{\left( \frac{n^2 \pi^2}{4L_r^2} + \lambda_\tau^2 \right) \left( \frac{n^4 \pi^4}{16L_r^4} + 4\lambda_\sigma^4 \right) - m_\tau m_\sigma} \\ B_n = \frac{D_0 T_n + D_n - m_\sigma A_n}{\frac{n\pi}{2L_r} \left( \frac{n^2 \pi^2}{4L_r^2} + \lambda_\tau^2 \right)} \end{cases} \quad (4.50)$$

Une fois  $A_n$  et  $B_n$  identifiés, il ne reste qu'à calculer les sept constantes  $a_\tau$ ,  $b_\tau$ ,  $c_\tau$ ,  $a_\sigma$ ,  $b_\sigma$ ,  $c_\sigma$  et  $d_\sigma$  dépendant des conditions aux limites. Ce calcul est réalisé dans quelques cas particuliers.

### 4.3 Solution simplifiée

Les constantes d'intégration à définir proviennent de la solution homogène du système différentiel. Ce système rendu homogène a été résolu dans la littérature. Dans certains cas, lorsque la configuration présente des conditions de symétrie ou d'antisymétrie par rapport au centre de la zone de recouvrement et que le comportement de l'ensemble de la structure est continu sur l'intervalle du recouvrement (pas de chargement ponctuel), il est possible de simplifier la solution de l'équation homogène. En appliquant les conditions aux limites correspondant aux conditions de symétrie, la forme de la solution générale se réduit sous la forme suivante [39],

$$\forall x \in [0, Lr], \quad \sigma(x) = \sigma_{sp}(x) + e^{-\lambda_\sigma x} [a_\sigma \cos(\lambda_\sigma x) + b_\sigma \sin(\lambda_\sigma x)] \quad (4.51)$$

$$\forall x \in [0, Lr], \quad \tau(x) = \tau_{sp}(x) + a_\tau + b_\tau e^{-\lambda_\tau x} \quad (4.52)$$

Ainsi, à partir de l'équation 4.44,  $f_\sigma$  s'écrit,

$$\begin{aligned} f_\sigma(x) = & k_p \left[ \frac{q_3}{\tilde{D}_3} + \frac{q_1}{\tilde{D}_1} \right] - m_\tau b_\tau \lambda_\tau e^{-\lambda_\tau x} \\ & + \varphi k_p \left[ \frac{N_3(x)}{\tilde{D}_3} - \frac{N_1(x)}{\tilde{D}_1} \right] \chi_0(x) \end{aligned} \quad (4.53)$$

et à partir de l'équation 4.46,  $f_\tau$  prend la forme,

$$\begin{aligned}
 f_\tau(x) = & k_s \frac{t_3 + t_2}{2\tilde{D}_3} q_3 - k_s \frac{t_1 + t_2}{2\tilde{D}_1} q_1 - m_\sigma e^{-\lambda_\sigma x} [a_\sigma \cos(\lambda_\sigma x) + b_\sigma \sin(\lambda_\sigma x)] \\
 & + \varphi k_s \left[ \frac{t_3 + t_2}{2\tilde{D}_3} N_3(x) + \frac{t_1 + t_2}{2\tilde{D}_1} N_1(x) \right] \chi_0(x)
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

Le couplage se traduit dans ces deux équations par un terme en  $b_\tau$  dans l'équation définissant  $f_\sigma(x)$  et la présence des termes en  $a_\sigma$  et  $b_\sigma$  dans la formulation de  $f_\tau(x)$ . Les termes en  $\chi_0(x)$  mettent en évidence la prise en compte des effets de courbure. Ces deux équations précédentes donnent  $C_n$  et  $D_n$ ,

$$\begin{cases} C_0 = c_0^1 + c_0^2 b_\tau \\ C_n = c_n^1 + c_n^2 b_\tau \\ D_0 = d_0^1 + d_0^2 a_\sigma \\ D_n = d_n^1 + d_n^2 a_\sigma + d_n^3 b_\sigma \end{cases} \tag{4.55}$$

avec,

$$\begin{cases} c_0^1 = k_p \left( \frac{q_3}{\tilde{D}_3} + \frac{q_1}{\tilde{D}_1} \right) + k_p \left( \frac{N_3(0)}{\tilde{D}_3} - \frac{N_1(0)}{\tilde{D}_1} \right) \chi_0(0) \\ c_0^2 = -m_\tau \lambda_\tau \\ d_0^1 = k_s \left( \frac{(t_3 + t_2)q_3}{2\tilde{D}_3} - \frac{(t_1 + t_2)q_1}{2\tilde{D}_1} \right) + k_s \left( \frac{(t_3 + t_2)N_3(0)}{2\tilde{D}_3} + \frac{(t_1 + t_2)N_1(0)}{2\tilde{D}_1} \right) \chi_0(0) \\ d_0^2 = -m_\sigma \end{cases} \tag{4.56}$$

Les  $c_n^i$  et les  $d_n^i$  sont définis par

$$\begin{cases} c_n^1 = \varphi k_p \int_0^{2L_r} \left[ \frac{N_3(x)}{\tilde{D}_3} - \frac{N_1(x)}{\tilde{D}_1} \right] \chi_0(x) \sin \frac{n\pi x}{2L_r} dx \\ \quad - \varphi k_p \int_0^{2L_r} \left[ \frac{N_3(0)}{\tilde{D}_3} - \frac{N_1(0)}{\tilde{D}_1} \right] \chi_0(0) \sin \frac{n\pi x}{2L_r} dx \\ c_n^2 = m_\tau \lambda_\tau \int_0^{2L_r} (1 - e^{-\lambda_\tau x}) \sin \frac{n\pi x}{2L_r} dx \\ \quad = m_\tau \frac{8L_r^3 \lambda_\tau^3 [1 - (-1)^n] - 2(-1)^n L_r \lambda_\tau n^2 \pi^2 [1 - e^{-2\lambda_\tau L_r}]}{n\pi (4\lambda_\tau^2 L_r^2 + n^2 \pi^2)} \end{cases} \tag{4.57}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} d_n^1 = \varphi k_s \int_0^{2L_r} \left[ \frac{(t_3 + t_2)N_3(x)}{2\tilde{D}_3} + \frac{(t_1 + t_2)N_1(x)}{2\tilde{D}_1} \right] \chi_0(x) \sin \frac{n\pi x}{2L_r} dx \\ \quad - \varphi k_s \int_0^{2L_r} \left[ \frac{(t_3 + t_2)N_3(0)}{2\tilde{D}_3} + \frac{t_1 + t_2)N_1(0)}{2\tilde{D}_1} \right] \chi_0(0) \sin \frac{n\pi x}{2L_r} dx \\ d_n^2 = m_\sigma \int_0^{2L_r} (1 - \cos(\lambda_\sigma x)) \sin \frac{n\pi x}{2L_r} dx \\ \quad = m_\sigma \frac{-8L_r^3 \lambda_\tau^2 [1 - (-1)^n] + 4(-1)^n L_r n^2 \pi^2 [\cos^2 \lambda_\tau L_r - 1]}{n\pi (n\pi + 2\lambda_\tau L_r) (n\pi - 2\lambda_\tau L_r)} \\ d_n^3 = -m_\sigma \int_0^{2L_r} (\sin(\lambda_\sigma x)) \sin \frac{n\pi x}{2L_r} dx \\ \quad = m_\sigma \frac{4(-1)^n n\pi L_r \sin \lambda_\tau L_r \cos \lambda_\tau L_r}{(n\pi + 2\lambda_\tau L_r) (n\pi - 2\lambda_\tau L_r)} \end{array} \right. \quad (4.58)$$

Les solutions particulières  $\sigma_{sp}(x)$  et  $\tau_{sp}(x)$  conservent leurs formes données par les équations 4.42. Compte tenu des équations précédentes, les termes constants  $A_n$  et  $B_n$  apparaissant dans les expressions de  $\sigma_{sp}(x)$  et  $\tau_{sp}(x)$  peuvent être réécrits sous la forme suivante (Cf. équation 4.50) :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_n = p_n^A + q_n^A b_\tau + r_n^A a_\sigma + s_n^A b_\sigma \\ B_n = p_n^B + q_n^B b_\tau + r_n^B a_\sigma + s_n^B b_\sigma \end{array} \right. \quad (4.59)$$

avec,

$$\left\{ \begin{array}{l} p_n^A = D_n^A \left[ \left( \frac{n^2 \pi^2}{4L_r^2} + \lambda_\tau^2 \right) (c_n^1 + c_0^1 T_n) - m_\tau (d_n^1 + d_0^1 T_n) \right] \\ q_n^A = D_n^A \left( \frac{n^2 \pi^2}{4L_r^2} + \lambda_\tau^2 \right) (c_n^2 + c_0^2 T_n) \\ r_n^A = -D_n^A m_\tau (d_n^2 + d_0^2 T_n) \\ s_n^A = -D_n^A m_\tau d_n^3 \\ p_n^B = D_n^B (d_0^1 T_n + d_n^1 - m_\sigma p_n^A) \\ q_n^B = -D_n^B m_\sigma q_n^A \\ r_n^B = D_n^B (d_0^2 T_n + d_n^2 - m_\sigma r_n^A) \\ s_n^B = D_n^B (d_n^3 - m_\sigma s_n^A) \\ D_n^A = \frac{1}{\left( \frac{n^2 \pi^2}{4L_r^2} + \lambda_\tau^2 \right) \left( \frac{n^4 \pi^4}{16L_r^4} + 4\lambda_\sigma^4 \right) - m_\tau m_\sigma} \\ D_n^B = \frac{2L_r}{n\pi \left( \frac{n^2 \pi^2}{4L_r^2} + \lambda_\tau^2 \right)} \end{array} \right. \quad (4.60)$$



$p_n^A, q_n^A, r_n^A, s_n^A, p_n^B, q_n^B, r_n^B$  et  $s_n^B$  ne dépendent que de  $n$ . Les constantes d'intégration  $a_\sigma, b_\sigma, a_\tau$  et  $b_\tau$  sont obtenues à partir des conditions aux limites. Le chapitre suivant détermine ces constantes pour quelques chargements types.

## Chapitre 5

# Identification du modèle pour des configurations particulières

---

<b>5.1</b>	<b>Cas du joint à simple recouvrement . . . . .</b>	<b>64</b>
<b>5.2</b>	<b>Cas d'une poutre renforcée en flexion trois points . . . . .</b>	<b>68</b>
<b>5.3</b>	<b>Cas d'une poutre renforcée en flexion/compression . . . . .</b>	<b>71</b>
5.3.1	Sous charge répartie . . . . .	76
5.3.2	Sous chargement thermique . . . . .	77
5.3.3	Sous charge de compression . . . . .	80

---

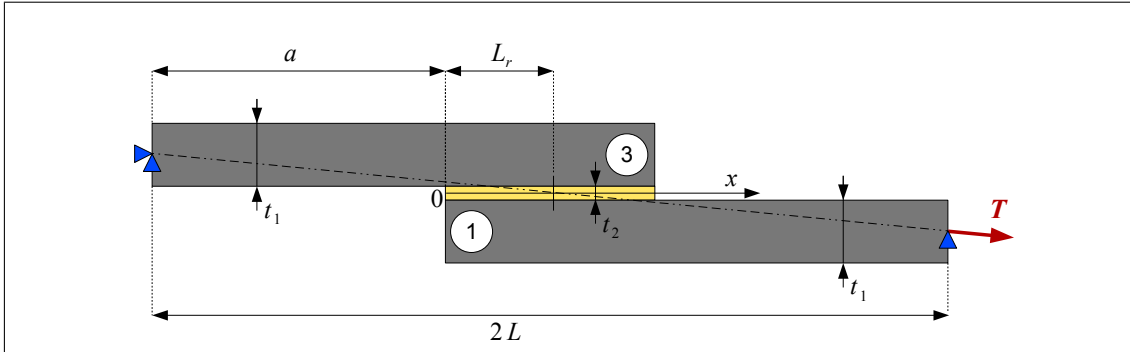


FIGURE 5.1 – Présentation du modèle étudié dans le cas du joint à simple recouvrement.

## 5.1 Cas du joint à simple recouvrement

Cette configuration est présentée figure 5.1. Les deux adhérents sont assemblés par le biais d'un joint de colle de longueur  $2L_r$ . Pour pouvoir être comparé par la suite à un modèle de la littérature les adhérents ont été choisis identiques. La configuration possède ainsi la propriété d'antisymétrie par rapport au milieu de la zone de recouvrement. La solution simplifiée donnée par les équations 4.51 et 4.52 peut donc être utilisée (la démarche pourrait facilement être généralisée au cas d'adhérents différents). Les conditions aux limites correspondant à cette configuration sont données par [106] [46] [22] :

$$\left\{ \begin{array}{l} b \int_0^{L_r} \Pi_z^{\text{global}}(x) = \alpha_n T \\ \left. \frac{d^2 \sigma}{dx^2} \right|_{x=0} = -\frac{k_p}{\tilde{D}_1} M_0(0) \\ b \int_0^{L_r} \tau(x) = -\frac{T}{2} \\ \left. \frac{d\tau(x)}{dx} \right|_{x=0} = \frac{k_s T}{\tilde{A}_1} - \frac{t_1 + t_2}{2} \frac{k_s}{\tilde{D}_1} M_0(0) + k_s (\alpha_3 - \alpha_1) \Delta T \end{array} \right. \quad (5.1)$$

où  $\Pi_z^{\text{global}}$  est la composante selon  $z$  du premier tenseur de Piola-Kirchhoff exprimée dans le repère global.  $T$  est la force de traction appliquée sur le substrat 1 ( $T > 0$  en traction). Les grandeurs indicées avec 0 correspondent au comportement de la structure équivalente rendue homogène.  $\alpha_n$  représente l'angle entre la direction  $x$  et la direction de la force  $T$  [46], ainsi,

$$\alpha_n = \frac{t_1 + t_2}{L} \quad (5.2)$$

Les conditions aux limites du système 5.1 sont obtenues à l'aide des équations précédentes appliquées en certains points particuliers :

- Les forces ne suivent pas la déformation de la structure. L'équilibre exprimé selon  $x$  s'écrit à partir du premier tenseur de Piola-Kirchhoff [22] (Cf. 4.1.1.2). Ainsi, l'intégrale de  $\Pi_z^{\text{global}}$  sur la surface de recouvrement est égale à la projection de la force  $T$  sur la direction  $z$ .

- La deuxième condition aux limites est obtenue en dérivant deux fois l'équation 4.21, définissant  $\sigma$ . Au point,  $x = 0$ , la courbure  $\chi_1$  est nulle et la courbure de l'adhérent 3 est assimilée à la courbure de la structure homogène.
- La troisième condition aux limites est obtenue en intégrant l'équation 4.25.
- La quatrième condition aux limites est obtenue en dérivant une fois l'équation 4.21, définissant  $\tau$  et en la combinant avec l'équation 4.23. Appliquée au point  $x = 0$ , la courbure de l'adhérent 1 est supposée nulle tandis que celle de l'adhérent 3 est identifiée à celle de la structure équivalente homogène.

A partir des équations 4.2, 4.3, 4.4 et 4.51 la première condition aux limites (écrite avec le premier tenseur de Piola-Kirchhoff) se réécrit,

$$b \int_0^{L_r} \Pi_z^{\text{global}}(x) = H_1 + H_2 a_\tau + H_3 b_\tau + H_4 a_\sigma + H_5 b_\sigma = \alpha_n T \quad (5.3)$$

Avec,

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1 = b \int_0^{L_r} \left[ \left( \frac{dw_0}{dx} \right)^2 + 1 \right] \sum_{n=1}^{\infty} p_n^A \sin \frac{n\pi x}{2L_r} dx \\ \quad + b \int_0^{L_r} \left[ \frac{dw_0}{dx} + \left( \frac{dw_0}{dx} \right)^3 \right] \sum_{n=1}^{\infty} p_n^B \cos \frac{n\pi x}{2L_r} dx \\ H_2 = b \int_0^{L_r} \left[ \frac{dw_0}{dx} + \left( \frac{dw_0}{dx} \right)^3 \right] dx \\ H_3 = b \int_0^{L_r} \left[ \left( \frac{dw_0}{dx} \right)^2 + 1 \right] \sum_{n=1}^{\infty} q_n^A \sin \frac{n\pi x}{2L_r} dx \\ \quad + b \int_0^{L_r} \left[ \frac{dw_0}{dx} + \left( \frac{dw_0}{dx} \right)^3 \right] \left( \sum_{n=1}^{\infty} q_n^B \cos \frac{n\pi x}{2L_r} + e^{-\lambda_\tau x} \right) dx \\ H_4 = b \int_0^{L_r} \left[ \left( \frac{dw_0}{dx} \right)^2 + 1 \right] \left( \sum_{n=1}^{\infty} r_n^A \sin \frac{n\pi x}{2L_r} + e^{-\lambda_\sigma x} \cos(\lambda_\sigma x) \right) dx \\ \quad + b \int_0^{L_r} \left[ \frac{dw_0}{dx} + \left( \frac{dw_0}{dx} \right)^3 \right] \left( \sum_{n=1}^{\infty} r_n^B \cos \frac{n\pi x}{2L_r} + e^{-\lambda_\tau x} \right) dx \\ H_5 = b \int_0^{L_r} \left[ \left( \frac{dw_0}{dx} \right)^2 + 1 \right] \left( \sum_{n=1}^{\infty} s_n^A \sin \frac{n\pi x}{2L_r} + e^{-\lambda_\sigma x} \sin(\lambda_\sigma x) \right) dx \\ \quad + b \int_0^{L_r} \left[ \frac{dw_0}{dx} + \left( \frac{dw_0}{dx} \right)^3 \right] \left( \sum_{n=1}^{\infty} s_n^B \cos \frac{n\pi x}{2L_r} + e^{-\lambda_\tau x} \right) dx \end{array} \right. \quad (5.4)$$

Compte tenu de l'équation 4.52, la troisième condition aux limites, se met sous la forme,

$$b \int_0^{L_r} \tau(x) = K_1 + K_2 a_\tau + K_3 b_\tau + K_4 a_\sigma + K_5 b_\sigma = -\frac{T}{2} \quad (5.5)$$

Avec,

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 = b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2p_n^B}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \\ K_2 = bL_r \\ K_3 = b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2q_n^B}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{1 - \exp^{-\lambda_\tau L_r}}{\lambda_\tau} \\ K_4 = b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2r_n^B}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \\ K_5 = b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2s_n^B}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \end{array} \right. \quad (5.6)$$

Le système 5.1 se met ainsi sous la forme d'un système de 4 équations dont les 4 inconnues sont les 4 constantes d'intégration  $a_\sigma$ ,  $b_\sigma$ ,  $a_\tau$ ,  $b_\tau$ . La résolution de ce système donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_\sigma = \frac{k_p M_0(0)}{2\lambda_\sigma^2 \tilde{D}_1} \\ b_\tau = \frac{(t_1 + t_2)k_s M_0(0)}{2\lambda_\tau^2 \tilde{D}_1} - \frac{k_s T}{\lambda_\tau^2 \tilde{A}_1} - \frac{k_s(\alpha_3 - \alpha_1)\Delta T}{\lambda_\tau^2} \\ a_\sigma = \frac{2[(K_2 + K_5)(\alpha_n T - H_1 - b_\sigma H_5) + H_3 K_1 + H_3 K_3 b_\tau] - H_3 T}{2[(K_2 + K_5)(H_2 + H_4) - K_4 H_3]} \\ a_\tau = -\frac{2[K_4(\alpha_n T - H_1 - b_\sigma H_5) + K_1 H_2 + K_3 H_2 b_\tau] - (H_4 + H_2)T}{2[(K_2 + K_5)(H_2 + H_4) - K_4 H_3]} \end{array} \right. \quad (5.7)$$

Afin d'évaluer correctement les contraintes au sein de l'adhésif, la flèche  $w_0(x)$  de la structure assemblée doit être calculée en tenant compte de la rigidité effective de la zone assemblée vis-à-vis de la flexion. Compte tenu de la diffusion des contraintes dans les zones d'extrémité des deux adhérents (zones de Saint-Venant), leurs rigidités flexionnelles ne peuvent être prises en compte dans leur intégralité qu'au delà de la zone de diffusion comptée à partir de l'extrémité de chaque adhérent. Il en résulte que la longueur efficace  $2L_{eff}$  de la zone assemblée pour le calcul de la flèche  $w_0(x)$  est inférieure à la longueur totale  $2L_r$  de recouvrement. Pour tenir compte de cet effet, la notion de longueur de diffusion  $l_0$  est introduite :  $L_r = L_{eff} + l_0$  (Cf. figure 5.2). Lors du calcul de la flèche de l'assemblage collé, il est important de tenir compte de  $l_0$  lorsque les effets du second ordre conditionnent la flèche. Ainsi, le raccord de la flèche entre la zone hors assemblage et la zone collée se fait à une distance  $l_0$  du point  $x = 0$ . Les formules analytiques de la flèche et du moment sont explicitées pour divers cas particuliers. L'équation 3.10 appliquée à la structure définie sur la figure 5.1 donne la flèche sous la forme suivante,

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in [-a, l_0], \quad w_0^-(x) = C_{g1} \cosh k_g(x + a) + C_{g2} \sinh k_g(x + a) + C_{g3}x + C_{g4} \\ \forall x \in [l_0, L_r], \quad w_0^+(x) = C_{d1} \cosh k_d x + C_{d2} \sinh k_d x + C_{d3}x + C_{d4} \end{array} \right. \quad (5.8)$$

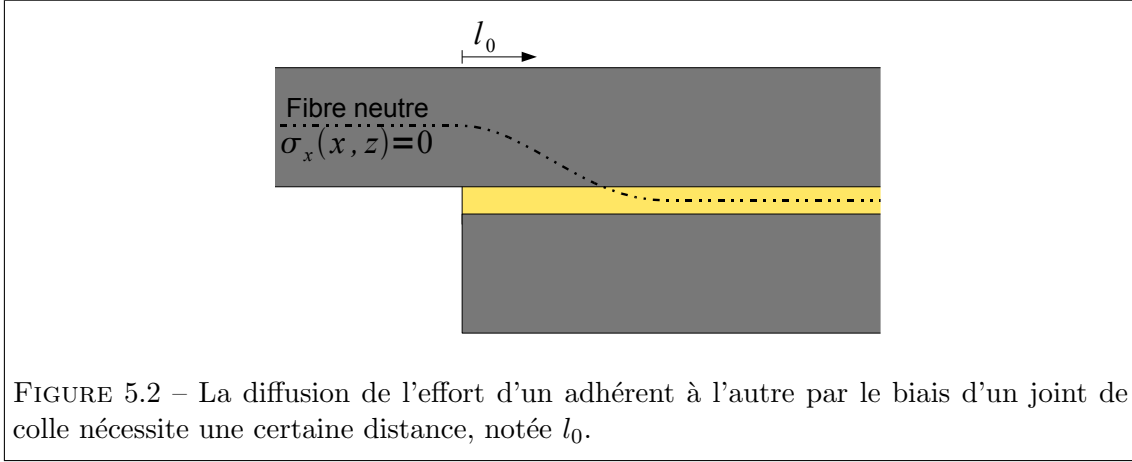


FIGURE 5.2 – La diffusion de l'effort d'un adhérent à l'autre par le biais d'un joint de colle nécessite une certaine distance, notée  $l_0$ .

Avec,

$$\begin{cases} k_g = \sqrt{\frac{N}{\tilde{D}_1}} \\ k_d = \sqrt{\frac{N}{\tilde{D}_{eq}}} \end{cases} \quad (5.9)$$

Les 8 constantes d'intégration  $C_{g1}, C_{g2}, C_{g3}, C_{g4}, C_{d1}, C_{d2}, C_{d3}$  et  $C_{d4}$  sont déterminées à l'aide des conditions aux limites suivantes,

$$\left\{ \begin{array}{l} w_0^-(-a) = 0 \\ \frac{d^2 w_0^-(x)}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0 \\ w_0^-(l_0) = w_0^+(l_0) \\ \frac{dw_0^-(x)}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{dw_0^+(x)}{dx} \Big|_{x=0} \\ \tilde{D}_1 \frac{d^2 w_0^-(x)}{dx^2} \Big|_{x=0} = \tilde{D}_{eq} \frac{d^2 w_0^+(x)}{dx^2} \Big|_{x=0} + \frac{T(t_2 + t_1)}{2} \\ \tilde{D}_1 \frac{d^3 w_0^-(x)}{dx^3} \Big|_{x=0} = \tilde{D}_{eq} \frac{d^3 w_0^+(x)}{dx^3} \Big|_{x=0} \\ w_0^+(L_r) = 0 \\ \frac{d^2 w_0^+(x)}{dx^2} \Big|_{x=L_r} = 0 \end{array} \right. \quad (5.10)$$

Il reste à préciser la valeur du paramètre  $l_0$ . En zone d'extrémité,  $w_1$  et  $w_3$  s'éloignent fortement de la valeur de la flèche  $w_0$  (flèche de la structure équivalente rendue homogène) : il en résulte la contrainte de pelage. Cette différence entre les flèches est maximale en  $x = 0$ . Par comparaison à des modèles éléments finis,  $l_0$  correspond à la distance nécessaire pour

que la différence entre  $w_1$  et  $w_3$  se stabilise à moins de 85% de la différence maximale. Par les hypothèses cinématiques, la différence de flèche des adhérents est directement liée à la contrainte de pelage au sein de l'adhésif. Ainsi,  $l_0$  peut être exprimée en fonction de la longueur caractéristique  $\lambda_\sigma^{-1}$  de l'équation différentielle 4.38, soit,

$$l_0 \approx 2\lambda_\sigma^{-1} \quad (5.11)$$

Cette valeur a été déterminée pour des renforts suffisamment fins pour négliger les effets de cisaillement dans les adhérents. A partir de cette distance, le renfort est considéré comme totalement efficace. A partir de la flèche, il vient pour  $M_0(0)$ ,

$$M_0(0) = -\tilde{D}_1 k_g^2 [C_{g1} \cosh k_g a + C_{g2} \sinh k_g a] \quad (5.12)$$

## 5.2 Cas d'une poutre renforcée en flexion trois points

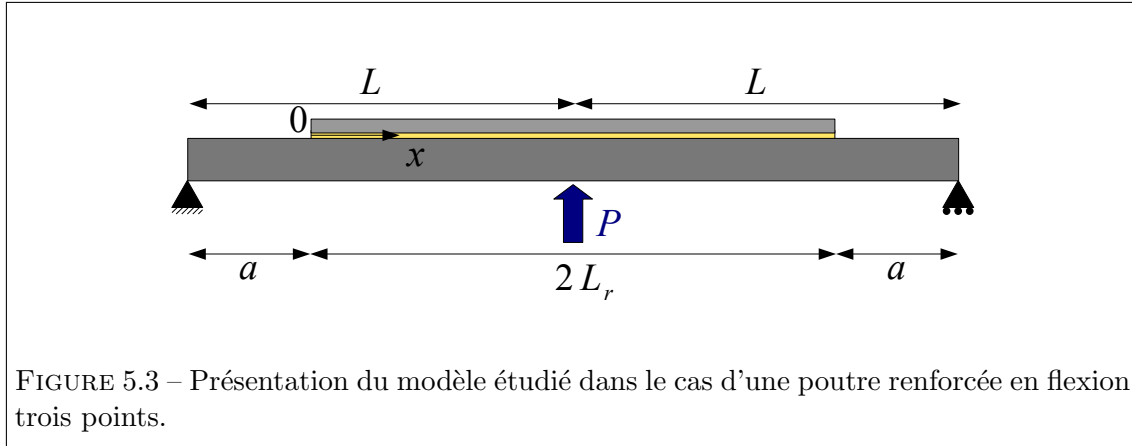


FIGURE 5.3 – Présentation du modèle étudié dans le cas d'une poutre renforcée en flexion trois points.

Cette configuration est présentée figure 5.3. Dans cette configuration, l'effort tranchant dans la structure est continu par morceau ( $P/2$ ) sur  $[0; L_r[$  et  $(-P/2)$  sur  $]L_r; 2L_r]$ . La solution simplifiée néglige ce qui se passe au point d'application de la force  $P$ . La solution générale doit être utilisée pour obtenir le comportement précis dans l'adhésif. En revanche, au point d'application de la force  $P$ , le couplage entre le cisaillement et le pelage peut être négligé. Ainsi,  $f_\tau(x)$  et  $f_\sigma(x)$  prennent la forme des équations 4.53 et 4.54. Ainsi,  $A_n$  et  $B_n$  sont définis par

$$\begin{cases} A_n = p_n^A + q_n^A b_\tau + r_n^A a_\sigma + s_n^A b_\sigma \\ B_n = p_n^B + q_n^B b_\tau + r_n^B a_\sigma + s_n^B b_\sigma \end{cases} \quad (5.13)$$

où les  $p_n^A$ ,  $q_n^A$ ,  $r_n^A$ ,  $s_n^A$ ,  $p_n^B$ ,  $q_n^B$ ,  $r_n^B$  et  $s_n^B$  sont définis par le système 4.60. Ces 7 constantes,

sont calculées à partir des conditions aux limites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} b \int_0^{L_r} \Pi_z^{\text{global}}(x) = 0 \\ \left. \frac{d^2 \sigma}{dx^2} \right|_{x=0} = \frac{k_p}{\tilde{D}_1} M_0(0) \\ \tau(L_r) = 0 \\ \left. \frac{d\sigma(x)}{dx} \right|_{x=L_r} = 0 \\ \left. \frac{d\tau(x)}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{t_1 + t_2}{2} \frac{k_s}{\tilde{D}_1} M_0(0) \\ \sigma(L_r) = k_p \Delta w_{1 \rightarrow eq} \\ \tau(L_r) - c_\tau e^{\lambda_\tau L_r} = \frac{T_0 + (\tilde{D}_3 + \tilde{D}_1) \left. \frac{d^3 w_0}{dx^3} \right|_{x=L_r}}{b(z_3 - z_1)} \end{array} \right. \quad (5.14)$$

où  $\Pi_z^{\text{global}}$  est la composante selon  $z$  du premier tenseur de Piola-Kirchhoff exprimée dans le repère global. Les grandeurs indicées avec 0 correspondent au comportement de la structure équivalente rendue homogène. Les conditions aux limites du système 5.14 sont obtenues à l'aide des équations précédentes appliquées en certains points particuliers :

- La première condition aux limites correspond au cas où la charge répartie est un poids mort, les forces ne suivent pas la déformation de la structure [22] (Cf. 4.1.1.2).
- La deuxième condition aux limites est obtenue en dérivant deux fois l'équation 4.21, définissant  $\sigma$ . Au point  $x = 0$ , la courbure  $\chi_3$  est nulle et la courbure de l'adhérent 1 correspond à celle du composant non renforcé.
- Les troisième et quatrième conditions aux limites correspondent à la condition de symétrie.
- La cinquième condition aux limites correspond à l'équation 4.21 définissant  $\tau$ , appliquée au point  $x = 0$ .
- Les flèches  $w_1$  et  $w_3$  des deux adhérents correspondant à la flexion générale de la poutre renforcée sont supposées égales. Le terme correctif  $\Delta w_{1 \rightarrow eq}$  résulte de la flexion locale du substrat au voisinage du point d'application de la force  $P$ . Ce terme est calculé en se basant sur la théorie des poutres sur appui élastique continu [47]. En supposant la poutre de longueur infinie, il vient :

$$\Delta w_{1 \rightarrow eq} = \frac{P}{2k_p} (\gamma_{eq} - \gamma_1) \quad (5.15)$$

avec

$$\gamma_{eq} = \left( \frac{bk_p}{4\tilde{D}_{eq}} \right)^{\frac{1}{4}} \quad \text{et} \quad \gamma_1 = \left( \frac{bk_p}{4\tilde{D}_1} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (5.16)$$



- La dernière condition aux limites correspond à la valeur du cisaillement en zone courante, en dehors des zones de Saint-Venant. Le terme  $c_\tau e^{\lambda_\tau L_r}$  modifie la répartition de la contrainte de cisaillement au voisinage du point d'application de la force ponctuelle  $P$ . Il permet de respecter la condition  $\tau(L_r) = 0$ . Ainsi, en  $x = L_r$ , le cisaillement moins le terme  $c_\tau e^{\lambda_\tau L_r}$  est égal au cisaillement en zone courante. Cette valeur est déterminée en supposant que dans cette zone, les adhérents sont sollicités au prorata de leurs rigidités respectives [106],

$$M_1(x) = RM_3(x) \text{ avec, } R = \frac{\tilde{D}_1}{\tilde{D}_3} \quad (5.17)$$

Ainsi, l'équilibre des moments dans une section en zone courante,

$$M_0(x) = M_1(x) + M_3(x) + z_1 N_1(x) + z_3 N_3(x) \quad (5.18)$$

donne,

$$\begin{cases} M_1(x) = \frac{R}{R+1} [M_0(x) - b(z_3 - z_1)\tau(x)] \\ M_3(x) = \frac{1}{R+1} [M_0(x) - b(z_3 - z_1)\tau(x)] \end{cases} \quad (5.19)$$

En dérivant par rapport à  $x$ , il vient,

$$\begin{cases} \frac{M_1(x)}{dx} = T_1(x) = \frac{R}{R+1} [T_0(x) - b\tau(x)(z_3 - z_1)] = -\tilde{D}_1 \frac{d^3 w_0(x)}{dx^3} \\ \frac{M_3(x)}{dx} = T_3(x) = \frac{1}{R+1} [T_0(x) - b\tau(x)(z_3 - z_1)] = -\tilde{D}_3 \frac{d^3 w_0(x)}{dx^3} \end{cases} \quad (5.20)$$

Puis, en additionnant ces deux équations, il vient pour  $\tau$  en zone courante :

$$\tau(x) = \frac{T_0 + (\tilde{D}_3 + \tilde{D}_1) \frac{d^3 w_0(x)}{dx^3}}{b(z_3 - z_1)} \text{ avec, } T_0 = \frac{P}{2} \quad (5.21)$$

Les 7 constantes à identifier ne dépendent que de la flèche  $w_0(x)$  de l'assemblage équivalent rendu homogène qui reste à déterminer et de ses dérivées successives. Dans la section médiane ( $x = L_r$ ),

$$N_0(L_r) = N_3(L_r) = -N_1(L_r) \quad (5.22)$$

Le moment dans la section rendue homogène s'écrit :

$$\begin{cases} \forall x \in [-a, 0], M_0^-(x) = \frac{P}{2}(x + a) \\ \forall x \in [0, L_r], M_0^+(x) = \frac{P}{2}(x + a) \end{cases} \quad (5.23)$$

et la flèche,

$$\begin{cases} \forall x \in [-a, 0], w_0^-(x) = \frac{P(x+a)}{12} \left[ \frac{2a^2 - x^2 - 2ax}{\tilde{D}_1} + \frac{3L_r(2a + L_r)}{\tilde{D}_{eq}} \right] \\ \forall x \in [0, L_r], w_0^+(x) = \frac{P}{12} \left[ \frac{2a^3}{\tilde{D}_1} - \frac{x^3 - 3ax^2 + 3L_r(x+a)(2a + L_r)}{\tilde{D}_{eq}} \right] \end{cases} \quad (5.24)$$

$b = 1 \text{ mm}$	$t_1 = 3 \text{ mm}$	$E_1 = 72 \text{ GPa}$	$\nu_1 = 0.3$
$L = 50 \text{ mm}$	$t_2 = 0.2 \text{ mm}$	$E_2 = 1.95 \text{ GPa}$	$\nu_2 = 0.3$
	$t_3 = 1 \text{ mm}$	$E_3 = 200 \text{ GPa}$	$\nu_3 = 0.3$

TABLE 5.1 – Données numériques utilisées dans le cas d'une poutre renforcée.

Ainsi,

$$\left. \frac{d^3 w_0}{dx^3} \right|_{x=L_r} = \frac{P}{-2\tilde{D}_{eq}} \quad (5.25)$$

Les figures 5.4 et 5.5 présentent, dans le cas  $\delta = L_r/L = 0.8$  et  $P = 50 \text{ N}$  la décomposition des termes qui contribuent aux contraintes de pelage et de cisaillement dans les équations 4.51 et 4.52 calculées avec les propriétés données dans le tableau 5.1.  $\delta$  correspond à la proportion de renforcement :

- Dans le cas de la contrainte de cisaillement (Cf. figure 5.4), les termes exponentiels ont un effet localisé aux extrémités (zones d'ancrage et de Saint-Venant). La série traduit principalement les effets de couplage en zone d'ancrage. Dans la configuration étudiée, ils représentent 15% du pic de cisaillement.
- Dans le cas de la contrainte de pelage (Cf. figure 5.5), les termes exponentiels ont un effet localisé aux extrémités. Le terme de la série correspond à la prise en compte du couplage entre le pelage et le cisaillement, dont l'impact dans cette configuration reste limité.

### 5.3 Cas d'une poutre renforcée sous divers modes de flexion/compression

Cette configuration est présentée figure 5.6. Sur un substrat, un renfort est fixé par le biais d'un joint de colle. Compte tenu de la symétrie, la solution simplifiée donnée par les équations 4.51 et 4.52 peut être utilisée. Les conditions aux limites correspondant à cette configuration sont données par [106] [128] :

$$\left\{ \begin{array}{l} b \int_0^{L_r} \Pi_z^{\text{global}}(x) = q_3 L_r \\ \left. \frac{d^2 \sigma}{dx^2} \right|_{x=0} = \frac{k_p}{\tilde{D}_1} M_0(0) \\ \tau(L_r) = 0 \\ \left. \frac{d\tau(x)}{dx} \right|_{x=0} = \frac{k_s N}{\tilde{A}_1} - \frac{t_1 + t_2}{2} \frac{k_s}{\tilde{D}_1} M_0(0) + k_s (\alpha_3 - \alpha_1) \Delta T \end{array} \right. \quad (5.26)$$

où  $\Pi_z^{\text{global}}$  est la composante selon  $z$  du premier tenseur de Piola-Kirchhoff exprimée dans le repère global.  $N$  est la force de compression appliquée au centre géométrique du substrat 1 ( $N > 0$  en compression). Les grandeurs indicées avec 0 correspondent au comportement de la structure équivalente rendue homogène. Les conditions aux limites du système 5.26 sont obtenues à l'aide des équations précédentes appliquées en certains points particuliers :

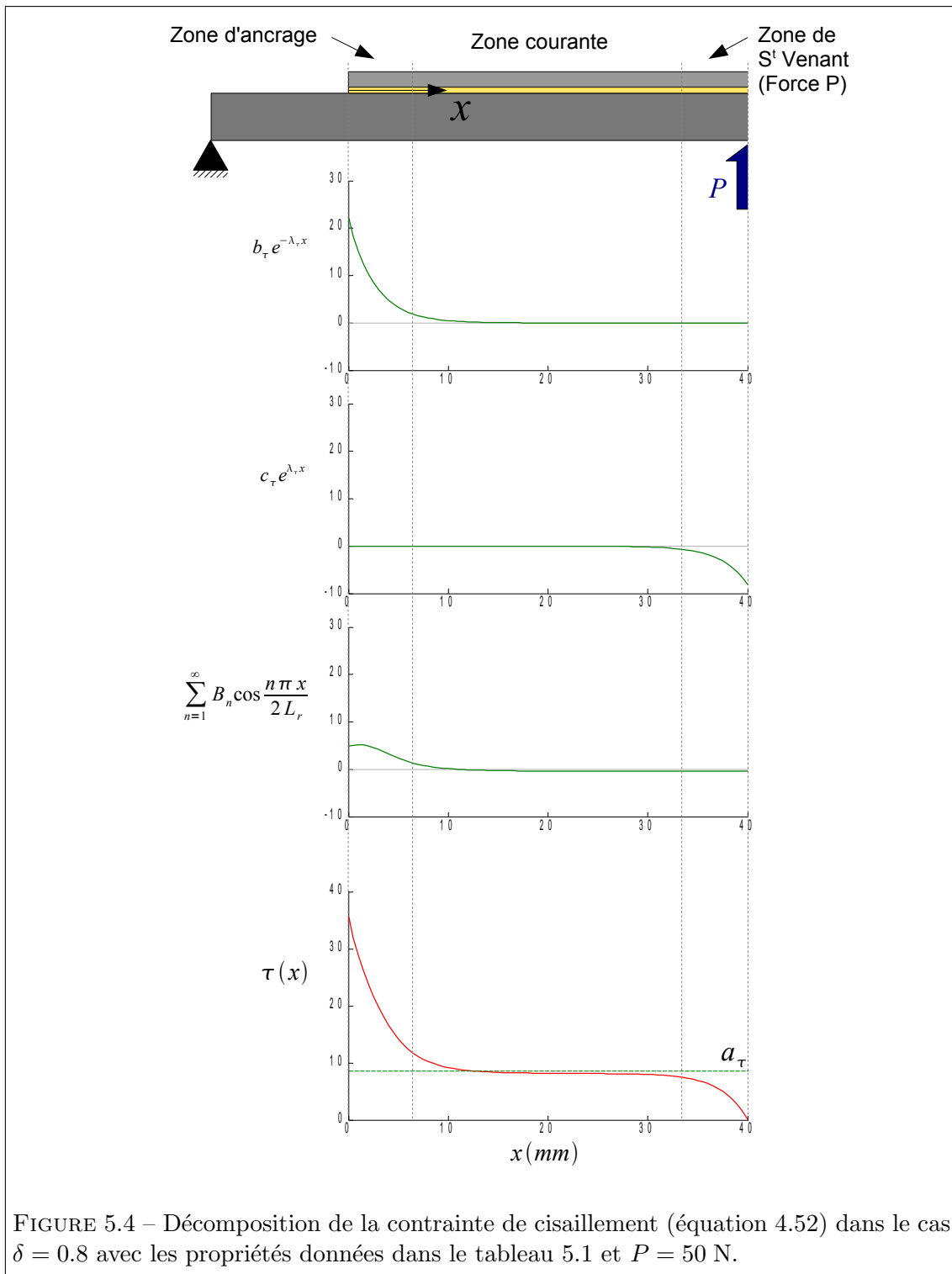
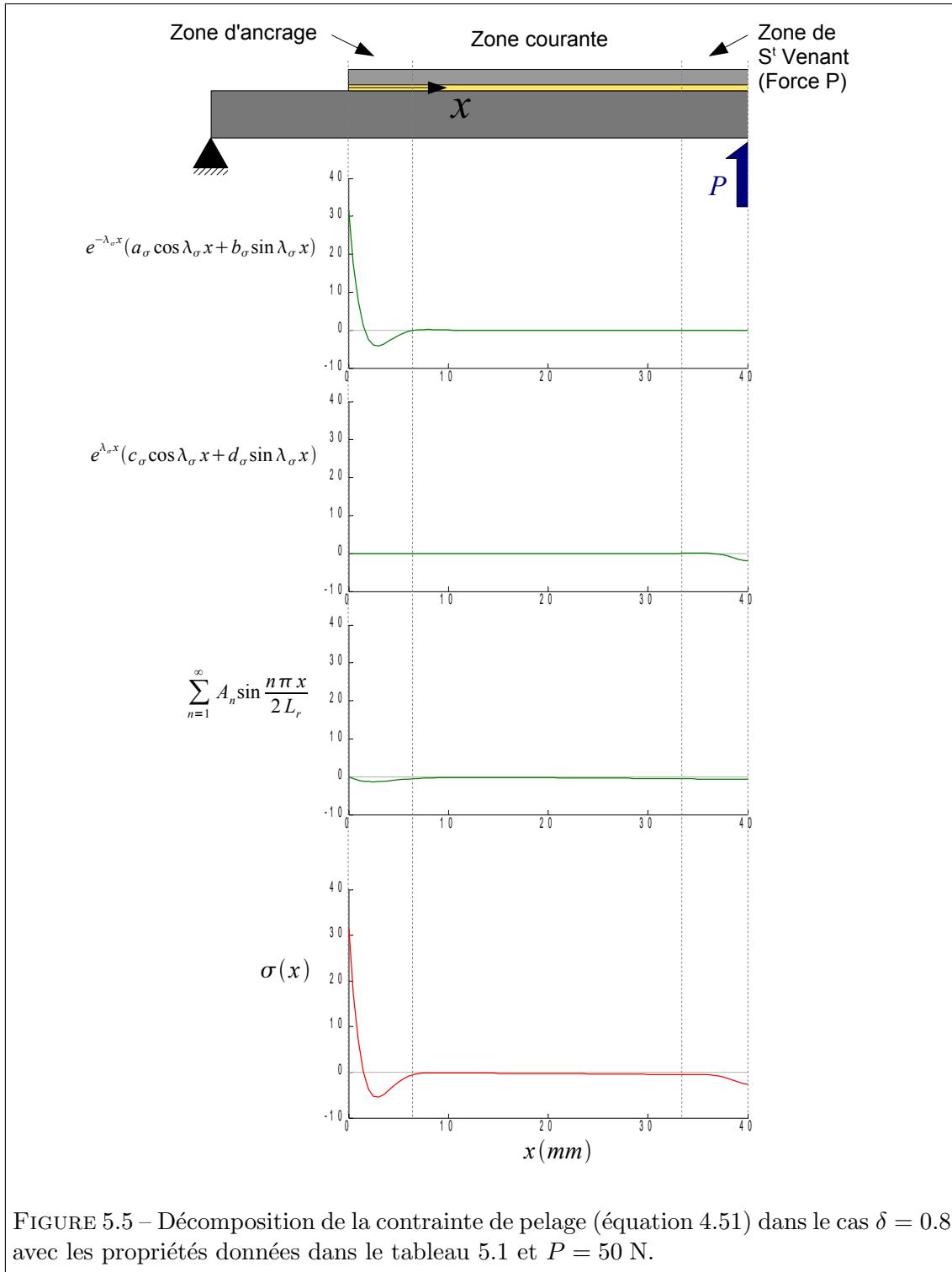


FIGURE 5.4 – Décomposition de la contrainte de cisaillement (équation 4.52) dans le cas  $\delta = 0.8$  avec les propriétés données dans le tableau 5.1 et  $P = 50$  N.



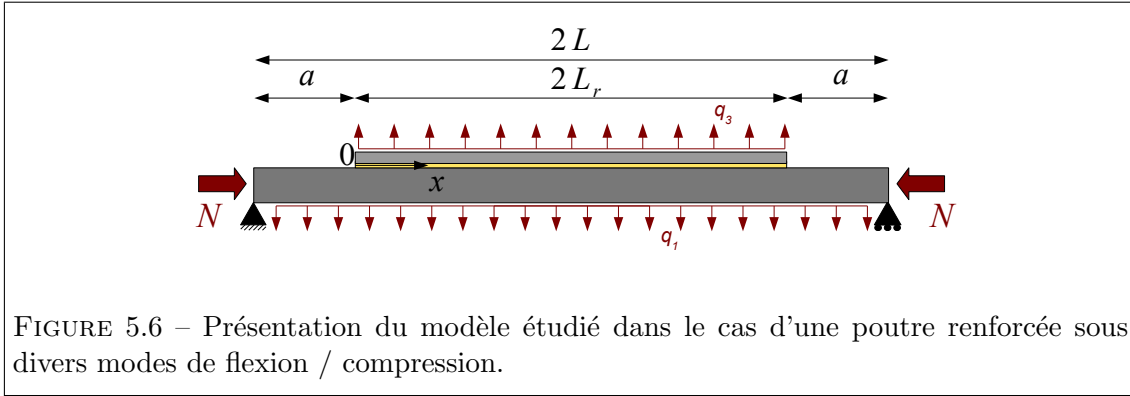


FIGURE 5.6 – Présentation du modèle étudié dans le cas d'une poutre renforcée sous divers modes de flexion / compression.

- La première condition aux limites correspond au cas où la charge répartie est un poids mort, les forces ne suivent pas la déformation de la structure [22] (Cf. 4.1.1.2).
- La deuxième condition aux limites est obtenue en dérivant deux fois l'équation 4.21, définissant  $\sigma$ . Au point,  $x = 0$ , la courbure  $\chi_3$  est nulle et la courbure de l'adhérent 1 correspond à celle de la poutre non renforcée.
- La troisième condition aux limites correspond à la condition de symétrie.
- La quatrième condition aux limites est obtenue en dérivant une fois l'équation 4.21, définissant  $\tau$  et en substituant l'équation 4.23. Appliquée au point  $x = 0$ , la courbure de l'adhérent 3 est supposée nulle tandis que celle de l'adhérent 1 correspond à celle de la poutre non renforcée.

A partir des équations 4.2, 4.3, 4.4 et 4.51 la première condition aux limites (écrite avec le premier tenseur de Piola-Kirchhoff), se réécrit,

$$b \int_0^{L_r} \Pi_z^{\text{global}}(x) = H_1 + H_2 a_\tau + H_3 b_\tau + H_4 a_\sigma + H_5 b_\sigma = q_3 L_r \quad (5.27)$$

Avec les  $H_i$  définis par,

$$\begin{aligned} H_1 = & b \int_0^{L_r} \left[ \left( \frac{dw_0}{dx} \right)^2 + 1 \right] \sum_{n=1}^{\infty} p_n^A \sin \frac{n\pi x}{2L_r} dx \\ & + b \int_0^{L_r} \left[ \frac{dw_0}{dx} + \left( \frac{dw_0}{dx} \right)^3 \right] \sum_{n=1}^{\infty} p_n^B \cos \frac{n\pi x}{2L_r} dx \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$H_2 = b \int_0^{L_r} \left[ \frac{dw_0}{dx} + \left( \frac{dw_0}{dx} \right)^3 \right] dx \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned}
 H_3 = & b \int_0^{L_r} \left[ \left( \frac{dw_0}{dx} \right)^2 + 1 \right] \sum_{n=1}^{\infty} q_n^A \sin \frac{n\pi x}{2L_r} dx \\
 & + b \int_0^{L_r} \left[ \frac{dw_0}{dx} + \left( \frac{dw_0}{dx} \right)^3 \right] \left( \sum_{n=1}^{\infty} q_n^B \cos \frac{n\pi x}{2L_r} + e^{-\lambda_\tau x} \right) dx
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

$$\begin{aligned}
 H_4 = & b \int_0^{L_r} \left[ \left( \frac{dw_0}{dx} \right)^2 + 1 \right] \left( \sum_{n=1}^{\infty} r_n^A \sin \frac{n\pi x}{2L_r} + e^{-\lambda_\sigma x} \cos(\lambda_\sigma x) \right) dx \\
 & + b \int_0^{L_r} \left[ \frac{dw_0}{dx} + \left( \frac{dw_0}{dx} \right)^3 \right] \left( \sum_{n=1}^{\infty} r_n^B \cos \frac{n\pi x}{2L_r} + e^{-\lambda_\tau x} \right) dx
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

$$\begin{aligned}
 H_5 = & b \int_0^{L_r} \left[ \left( \frac{dw_0}{dx} \right)^2 + 1 \right] \left( \sum_{n=1}^{\infty} s_n^A \sin \frac{n\pi x}{2L_r} + e^{-\lambda_\sigma x} \sin(\lambda_\sigma x) \right) dx \\
 & + b \int_0^{L_r} \left[ \frac{dw_0}{dx} + \left( \frac{dw_0}{dx} \right)^3 \right] \left( \sum_{n=1}^{\infty} s_n^B \cos \frac{n\pi x}{2L_r} + e^{-\lambda_\tau x} \right) dx
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

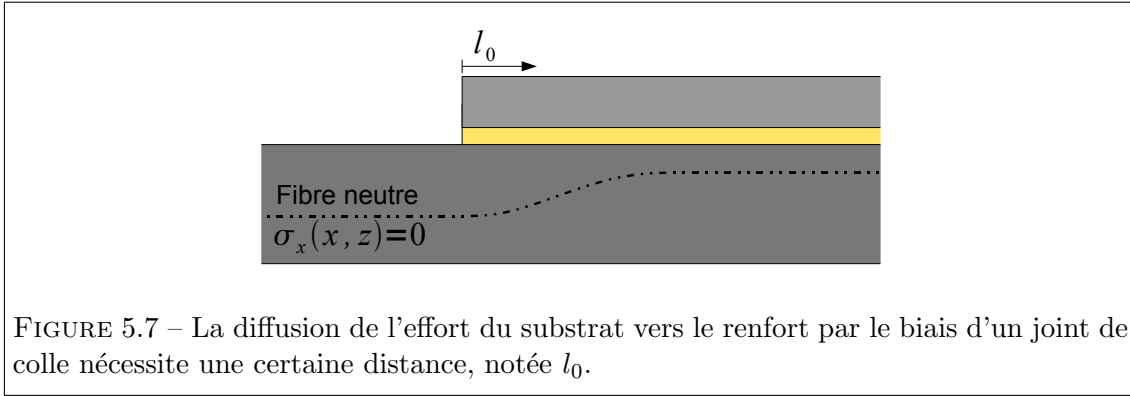
La troisième condition aux limites, se met sous la forme,

$$\tau(L_r) = K_1 + K_2 a_\tau + K_3 b_\tau + K_4 a_\sigma + K_5 b_\sigma = 0 \tag{5.33}$$

Avec,

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 = \sum_{n=1}^{\infty} p_n^B \cos \frac{n\pi}{2} \\ K_2 = 1 \\ K_3 = e^{-\lambda_\tau L_r} + \sum_{n=1}^{\infty} q_n^B \cos \frac{n\pi}{2} \\ K_4 = \sum_{n=1}^{\infty} r_n^B \cos \frac{n\pi}{2} \\ K_5 = \sum_{n=1}^{\infty} s_n^B \cos \frac{n\pi}{2} \end{array} \right. \tag{5.34}$$

Ainsi, le système 5.26 se met sous la forme d'un système de 4 équations dont les 4 inconnues sont les 4 constantes d'intégration  $a_\sigma$ ,  $b_\sigma$ ,  $a_\tau$ ,  $b_\tau$ . La résolution de ce système



donne :

$$\begin{cases} b_\sigma = -\frac{k_p M_0(0)}{2\lambda_\sigma^2 \tilde{D}_1} \\ b_\tau = \frac{(t_1 + t_2)k_s M_0(0)}{2\lambda_\tau^2 \tilde{D}_1} - \frac{k_s N}{\lambda_\tau^2 \tilde{A}_1} - \frac{k_s(\alpha_3 - \alpha_1)\Delta T}{\lambda_\tau^2} \\ a_\sigma = \frac{(K_2 + K_5)(q_3 L_r - H_1 - b_\sigma H_5) + H_3 K_1 + H_3 K_3 b_\tau}{(K_2 + K_5)(H_2 + H_4) - K_4 H_3} \\ a_\tau = \frac{K_4(q_3 L_r - H_1 - b_\sigma H_5) + K_1 H_2 + K_3 H_2 b_\tau}{(K_2 + K_5)(H_2 + H_4) - K_4 H_3} \end{cases} \quad (5.35)$$

Afin d'évaluer correctement les contraintes au sein de l'adhésif, la flèche  $w_0(x)$  de la structure renforcée doit être calculée. L'effort est transmis au renfort par le biais de l'adhésif sur une certaine distance (Figure 5.7). Ainsi, la longueur efficace du renfort est inférieure à sa longueur réelle. Pour certains types de chargement ceci peut avoir une influence sur le comportement global (caractérisé par la flèche). La notion de longueur de diffusion  $l_0$  déjà introduite dans le cas de l'assemblage par simple recouvrement, est reprise ici ( $L_r = L_{eff} + l_0$ ). Lors du calcul de la flèche de l'assemblage collé, il sera important de tenir compte de  $l_0$  lorsque les effets du second ordre conditionnent la flèche (cas du flambage). Les formules analytiques de la flèche et du moment sont explicitées pour divers cas particuliers.

### 5.3.1 Sous charge répartie

Dans ce cas, seuls  $q_1$  et  $q_3$  sont considérés ( $N = 0$ ). Ainsi, il vient pour le moment,

$$\begin{cases} \forall x \in [-a, 0], M_0^-(x) = -\frac{q_1}{2}(x+a)(2L-x-a) + q_3(x+a)L_r \\ \forall x \in [0, L_r], M_0^+(x) = -\frac{q_1}{2}(x+a)(2L-x-a) - \frac{q_3}{2}[x^2 - 2L_r(x+a)] \end{cases} \quad (5.36)$$

et la flèche,

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in [-a, 0], w_0^-(x) = -\frac{q_1(x+a)}{24} \left[ \frac{x^3 + (3a-4L)x^2 + a(x-a)(3a-8L)}{\tilde{D}_1} \right] \\ \quad - \frac{q_1(x+a)}{6} \left[ \frac{2L^3 - 3La^2 + a^3}{\tilde{D}_{eq}} \right] \\ \quad - \frac{q_3 L_r(x+a)}{6} \left[ \frac{x^2 + 2ax - 2a^2}{\tilde{D}_1} - 2L_r \frac{3a + L_r}{\tilde{D}_{eq}} \right] \\ \forall x \in [0, L_r], w_0^+(x) = -\frac{q_1}{24} \left[ \frac{x^3(x-4L_r) - 6ax^2(2L_r+a)}{\tilde{D}_{eq}} \right] \\ \quad - \frac{q_1}{24} \left[ \frac{4L_r(x+a)(3a^2 + 6aL_r + 2L_r^2)}{\tilde{D}_{eq}} \right] \\ \quad - \frac{q_1}{24} \left[ \frac{5a^4 + 8a^3 L_r}{\tilde{D}_1} \right] - \frac{q_3}{24} \left[ \frac{8L_r a^3}{\tilde{D}_1} \right] \\ \quad + \frac{q_3}{24} \left[ \frac{8L_r(x+a)(3a^2 + L_r^2) + x^3(x-4L_r)}{\tilde{D}_{eq}} \right] \end{array} \right. \quad (5.37)$$

Les figures 5.8 et 5.9 illustrent, dans le cas  $\delta = 0.8$  avec les propriétés données dans le tableau 5.1 et  $q_1 = -1 \text{ N.mm}^{-1}$ , les contraintes de cisaillement et de pelage au milieu du joint le long de la zone de recouvrement. Ces figures montrent que les termes exponentiels dans les formules des contraintes (équations 4.51 et 4.52) ont un impact localisé aux extrémités. En revanche, la solution particulière détermine l'allure des répartitions des contraintes en zone courante. Elles modifient également la distribution en zone d'extrémité : cet effet correspond au couplage entre le cisaillement et le pelage.

### 5.3.2 Sous chargement thermique

Dans ce cas, le chargement mécanique est nul. Un chargement thermique  $\Delta T$  est appliqué à l'ensemble de la structure. La courbure  $\chi_0$  au droit de la partie assemblée est constante. Dans la structure équivalente rendue homogène, le calcul des résultantes dans une section de la zone renforcée donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} b \int \sigma_x(z) dz = N_1 + N_3 = 0 \\ b \int z \sigma_x(z) dz = M_1 + z_1 N_1 + M_3 + z_3 N_3 = 0 \end{array} \right. \quad (5.38)$$

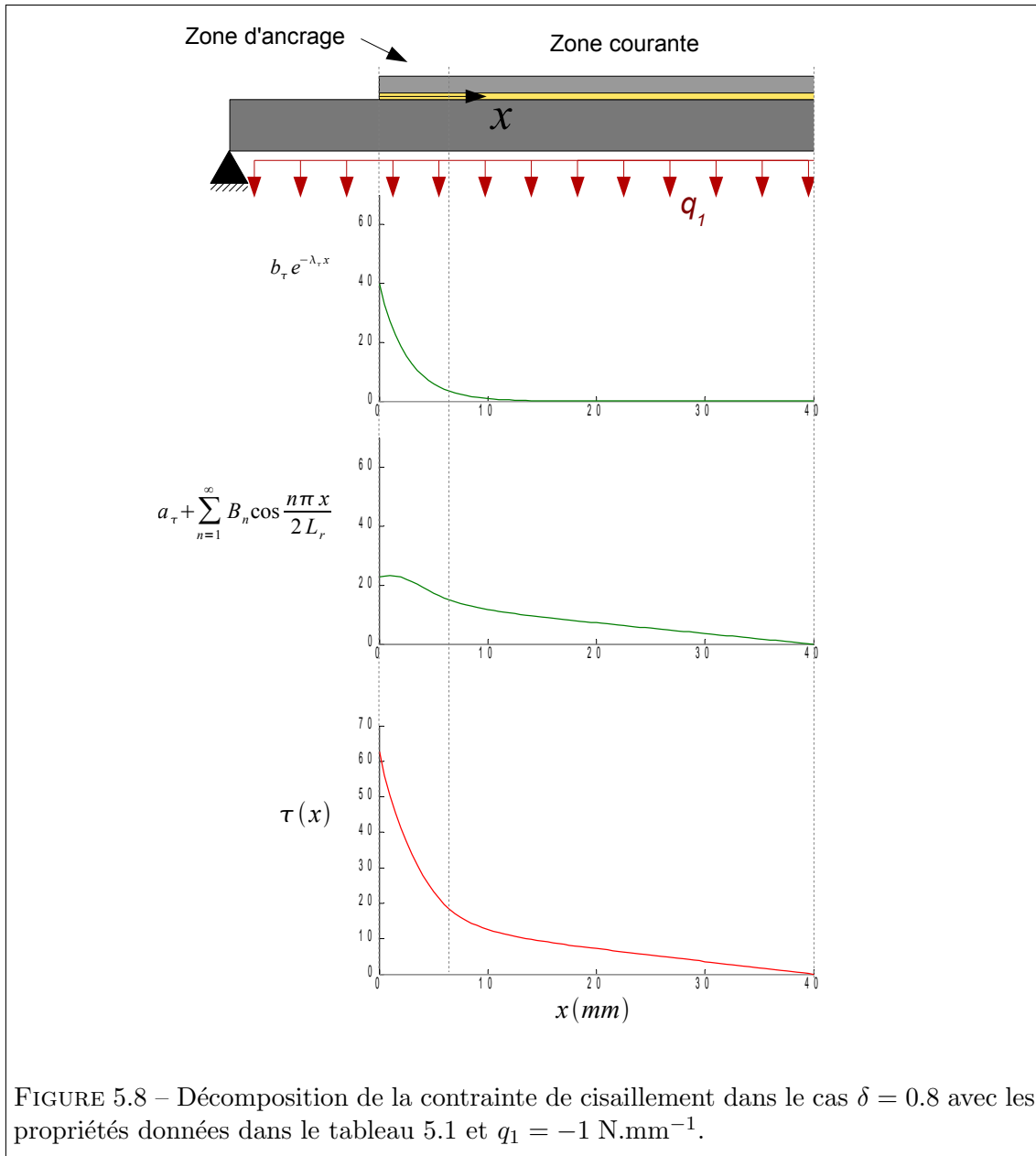
Avec,

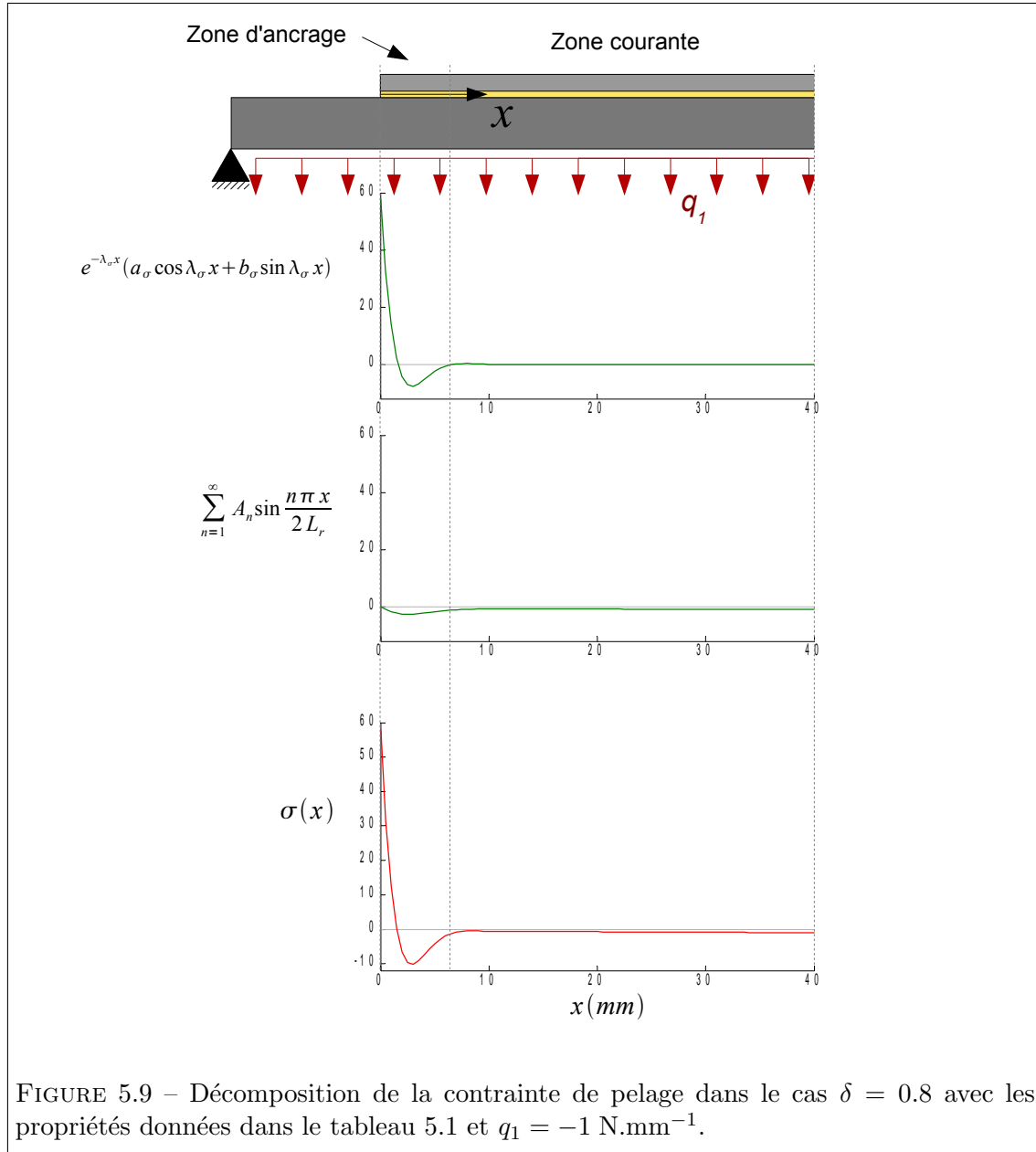
$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = \tilde{E}_1 b t_1 (\varepsilon_0 - z_1 \chi_0 - \alpha_1 \Delta T) \\ N_3 = \tilde{E}_3 b t_3 (\varepsilon_0 - z_3 \chi_0 - \alpha_3 \Delta T) \\ M_1 = -\tilde{D}_1 \chi_0 \\ M_3 = -\tilde{D}_3 \chi_0 \end{array} \right. \quad (5.39)$$

Cela conduit à,

$$\chi_0 = -\frac{\tilde{A}_1 \tilde{A}_3 (z_1 - z_3) (\alpha_1 - \alpha_3) \Delta T}{\tilde{A}_1 \tilde{A}_3 (z_1 - z_3)^2 + (\tilde{D}_1 + \tilde{D}_3) (\tilde{A}_1 + \tilde{A}_3)} \quad (5.40)$$







La flèche de l'assemblage prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \forall x \in [-a, 0], w_0^-(x) = C_{w1}x + C_{w2} \\ \forall x \in [0, L_r], w_0^+(x) = \frac{\chi_0}{2}x^2 + C_{w3}x + C_{w4} \end{cases} \quad (5.41)$$

En appliquant les conditions aux limites suivantes,

$$\begin{cases} w_0^-(-a) = 0 \\ w_0^-(0) = w_0^+(0) \\ \left. \frac{w_0^-(x)}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{w_0^+(x)}{dx} \right|_{x=0} \\ \left. \frac{w_0^+(x)}{dx} \right|_{x=L_r} = 0 \end{cases} \quad (5.42)$$

Il vient :

$$\begin{cases} C_{w1} = -\chi_0 L_r \\ C_{w2} = -\chi_0 a L_r \\ C_{w3} = -\chi_0 L_r \\ C_{w4} = -\chi_0 a L_r \end{cases} \quad (5.43)$$

Ainsi,

$$\begin{cases} \forall x \in [-a, 0], M_0^-(x) = 0 \\ \forall x \in ]0, L_r], M_0^+(x) = -\chi_0 D_{eq} \end{cases} \quad (5.44)$$

La courbure  $\chi_0$  étant donnée par l'équation 5.40.

### 5.3.3 Sous charge de compression

L'équation 3.10 appliquée à la structure définie sur la figure 5.6 (en ne considérant que  $N > 0$ ) donne la flèche sous le forme suivante,

$$\begin{cases} \forall x \in [-a, l_0], w_0^-(x) = C_{g1} \cos k_g x + C_{g2} \sin k_g x \\ \forall x \in [l_0, L_r], w_0^+(x) = C_{d1} \cos k_d x + C_{d2} \sin k_d x + e \end{cases} \quad (5.45)$$

Avec,

$$\begin{cases} k_g = \sqrt{\frac{N}{\tilde{D}_1}} \\ k_d = \sqrt{\frac{N}{\tilde{D}_{eq}}} \\ e = \frac{t_1}{2} - \frac{\sum_{i=1}^n z_i E_i \Omega_i}{\sum_{i=1}^n E_i \Omega_i} \end{cases} \quad (5.46)$$

Les 4 constantes d'intégration  $C_{g1}$ ,  $C_{g2}$ ,  $C_{d1}$ ,  $C_{d2}$  sont déterminées à l'aide des conditions aux limites suivantes,

$$\left\{ \begin{array}{l} w_0^-(-a) = 0 \\ w_0^-(l_0) = w_0^+(l_0) \\ \frac{w_0^-(x)}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{w_0^+(x)}{dx} \Big|_{x=0} \\ \frac{w_0^+(x)}{dx} \Big|_{x=L_r} = 0 \end{array} \right. \quad (5.47)$$

Il vient,

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{g1} = \frac{ek_d (\tan k_d L_r \cos k_d l_0 - \sin k_d l_0) \tan k_g a}{K_{gd}} \\ C_{g2} = \frac{ek_d (\tan k_d L_r \cos k_d l_0 - \sin k_d l_0)}{K_{gd}} \\ C_{d1} = -\frac{ek_g (\tan k_g a \sin k_g l_0 - \cos k_g l_0)}{K_{gd}} \\ C_{d2} = -\frac{ek_g (\tan k_g a \sin k_g l_0 - \cos k_d l_0) \tan k_d L_r}{K_{gd}} \\ K_{gd} = k_d [\sin k_g l_0 + \tan k_g a \cos k_g l_0] [\tan k_d L_r \cos k_d l_0 - \sin k_d l_0] \\ \quad + k_g [\cos k_d l_0 + \tan k_d L_r \sin k_d l_0] [\tan k_g a \sin k_g l_0 - \cos k_g l_0] \end{array} \right. \quad (5.48)$$

Comme précédemment, il reste à définir le paramètre  $l_0$ . En zone d'extrémité,  $w_1$  et  $w_3$  s'éloignent fortement de la valeur de la flèche  $w_0$  (flèche de la structure équivalente rendue homogène) : il en résulte la contrainte de pelage. Cette différence entre les flèches est maximale en  $x = 0$ . Par comparaison à des modèles éléments finis,  $l_0$  correspond à la distance nécessaire pour que la différence entre  $w_1$  et  $w_3$  se stabilise à moins de 85% de la différence maximale. Par les hypothèses cinématiques, la différence de flèche des adhérents est directement liée à la contrainte de pelage au sein de l'adhésif. Ainsi,  $l_0$  est obtenue à partir de la distance caractéristique  $\lambda_\sigma^{-1}$  de l'équation différentielle 4.38, soit,

$$l_0 \approx 2\lambda_\sigma^{-1} \quad (5.49)$$

Cette valeur a été déterminée pour des renforts suffisamment fins pour négliger les effets de cisaillement dans les adhérents. A partir de cette distance, le renfort est considéré comme pleinement efficace. Les figures 5.10 et 5.11 illustrent l'influence de cette zone d'interaction sur le comportement global de l'assemblage. Ces figures ont été réalisées avec les propriétés définies par le tableau 5.1. La force de compression  $N$  est de 400 N. La figure 5.10 montre l'influence de  $l_0$  lorsque  $N$  se rapproche de la charge critique de flambage. La figure 5.11 compare la flèche obtenue par un modèle éléments finis aux flèches obtenues analytiquement sans/avec prise en compte de la longueur de diffusion  $l_0$ . Cette figure montre la concordance des résultats numériques avec la solution analytique en tenant compte de  $l_0$ .

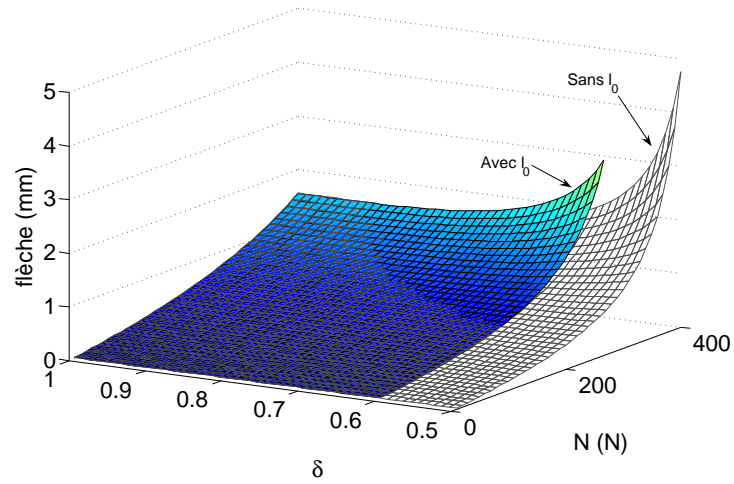


FIGURE 5.10 – Influence de la zone d'interaction  $l_0$  sur le comportement global d'une poutre renforcée comprimée.

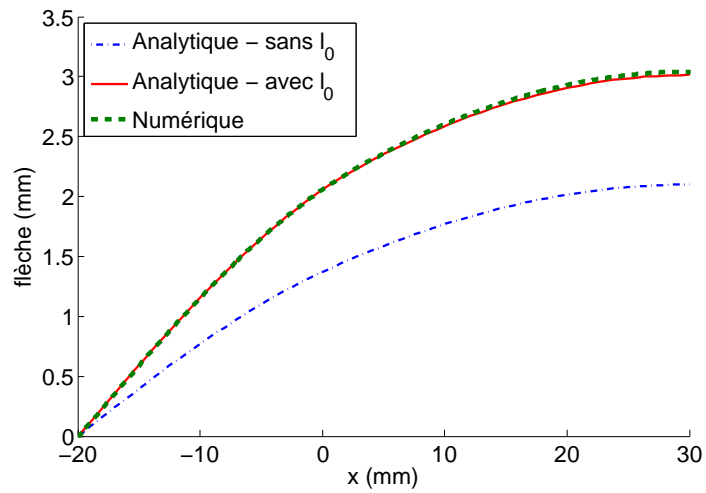


FIGURE 5.11 – Influence de la zone d'interaction  $l_0$  sur le comportement global d'une poutre renforcée comprimée pour  $\delta = 0.6$ .

A partir de la flèche , il vient pour  $M_0(0)$ ,

$$M_0(0) = C_{g1}N \quad (5.50)$$

Les constantes d'intégration  $a_\tau$ ,  $b_\tau$ ,  $a_\sigma$  et  $b_\sigma$  sont définies par les équations 5.35 et 5.50.

Les figures 5.12 et 5.13 illustrent, dans le cas  $\delta = 0.8$  avec les propriétés données dans le tableau 5.1 et  $N = 300$  N, les contraintes de cisaillement et de pelage au milieu du joint le long de la zone de recouvrement. Ces figures montrent comme dans le cas de la charge répartie que les termes en exponentiel dans les formules des contraintes (équations 4.51 et 4.52) ont un impact localisé aux extrémités. En revanche, la solution particulière détermine l'allure des répartitions de contrainte en zone courante. Ce phénomène est davantage marqué sur la contrainte de cisaillement. Les solutions particulières contribuent également à accentuer les pics de contrainte en zone d'extrémité : cet effet correspond au couplage entre le cisaillement et le pelage. Cette décomposition met en avant l'intérêt de pouvoir calculer la flèche  $w_0$  de l'assemblage collé rendu homogène. En effet, le calcul des solutions particulières et des constantes d'intégration est basé sur  $w_0$  et ses dérivées.

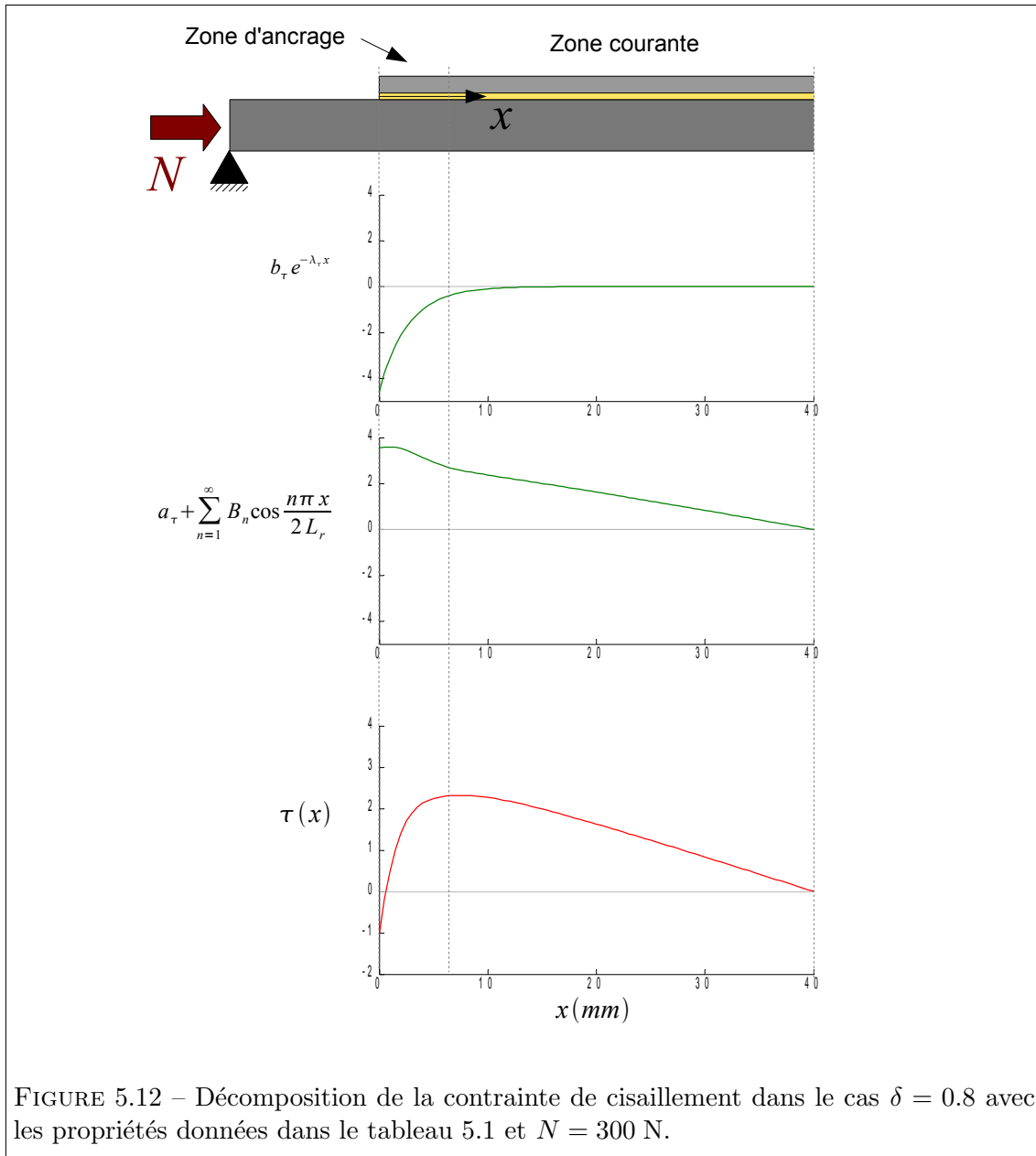


FIGURE 5.12 – Décomposition de la contrainte de cisaillement dans le cas  $\delta = 0.8$  avec les propriétés données dans le tableau 5.1 et  $N = 300$  N.

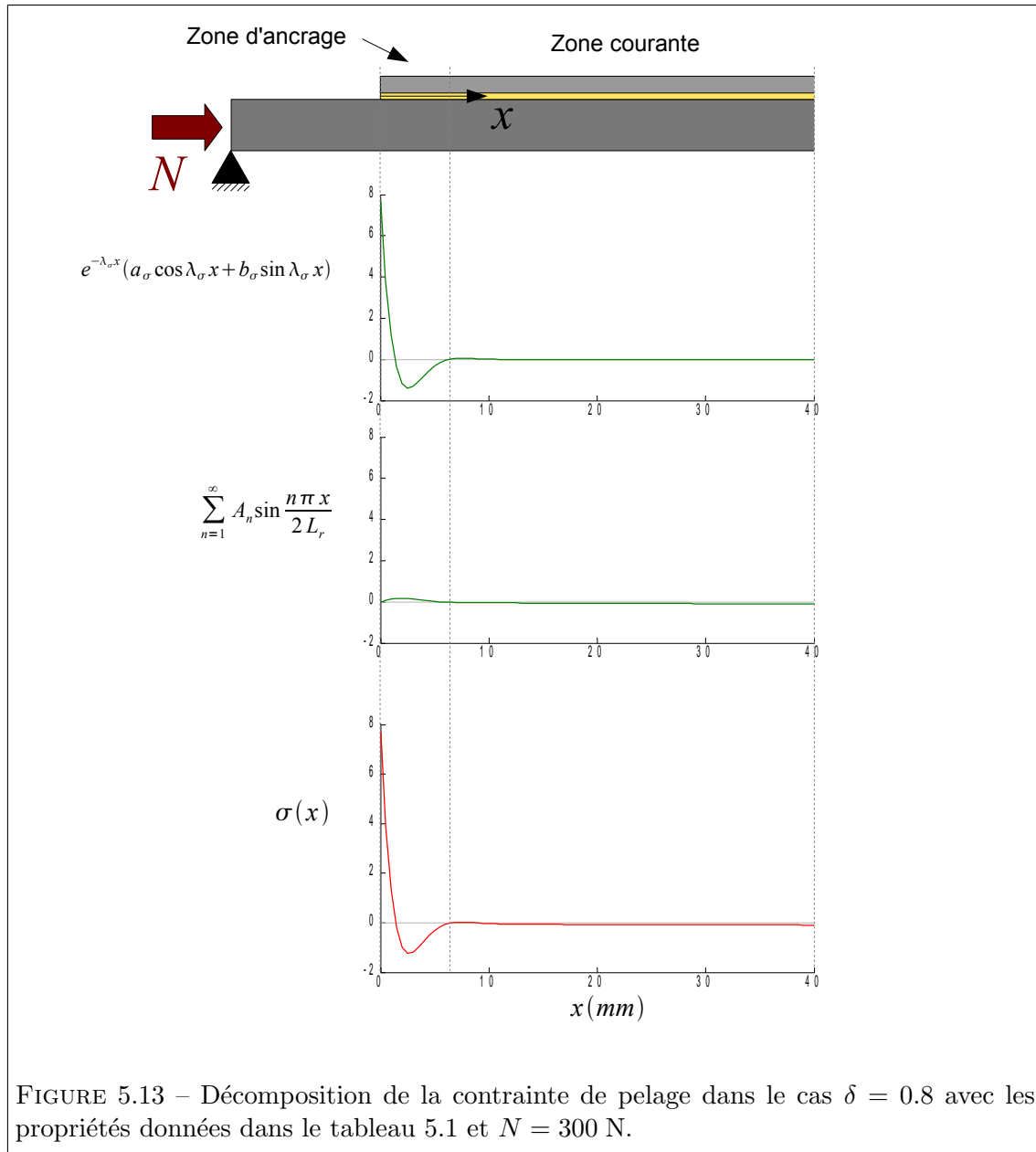


FIGURE 5.13 – Décomposition de la contrainte de pelage dans le cas  $\delta = 0.8$  avec les propriétés données dans le tableau 5.1 et  $N = 300$  N.





## Chapitre 6

# Influence de diverses hypothèses simplificatrices

---

<b>6.1</b>	<b>Cas d'une poutre renforcée sous charge répartie . . . . .</b>	<b>88</b>
6.1.1	Influence des effets de courbure . . . . .	88
6.1.2	Influence du couplage des contraintes de cisaillement et de pelage	90
<b>6.2</b>	<b>Cas d'une poutre renforcée comprimée . . . . .</b>	<b>91</b>
6.2.1	Influence des effets de courbure . . . . .	91
6.2.2	Influence du couplage des contraintes de cisaillement et de pelage	92
<b>6.3</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>95</b>

---

Cette partie a pour objectif d'évaluer l'influence des hypothèses simplificatrices fréquemment rencontrées dans la littérature à savoir la non prise en compte des effets de courbure ou l'omission des effets de couplage entre contrainte de cisaillement et contrainte de pelage dans le joint. Cette étude est basée sur le cas d'une poutre renforcée soumise à deux configurations de chargements : la flexion sous charge répartie et le flambage. Il est présenté figure 5.6. Les paramètres utilisés sont définis par le tableau 6.1. La flexion correspond à un cas où les effets du second ordre ont peu d'influence sur le comportement global. Le flambage est un cas de chargement où les effets du second ordre conditionnent le comportement de l'assemblage.

$b = 1 \text{ mm}$	$t_1 = 3 \text{ mm}$	$E_1 = 72 \text{ GPa}$	$\nu_1 = 0.3$
$L = 50 \text{ mm}$	$t_2 = 0.2 \text{ mm}$	$E_2 = 1.95 \text{ GPa}$	$\nu_2 = 0.3$
	$t_3 = 1 \text{ mm}$	$E_3 = 200 \text{ GPa}$	$\nu_3 = 0.3$

TABLE 6.1 – Données numériques utilisées dans le cas d'une poutre renforcée.

## 6.1 Cas d'une poutre renforcée sous charge répartie

La structure est soumise à une charge répartie  $q_1 = -1 \text{ N.mm}^{-1}$ . Les autres efforts sont nuls (i.e.  $P = N = q_3 = 0$ ).

### 6.1.1 Influence des effets de courbure

Pour négliger les effets de courbure dans la solution précédente, il suffit de prendre  $\varphi = 0$  dans les équations 4.38 et 4.39.

Les figures 6.1 et 6.2 présentent la contrainte de pelage au milieu de l'adhésif le long de la zone de recouvrement. Elles comparent l'influence des effets de courbure sur la contrainte de pelage pour un recouvrement intégral (i.e.  $\delta = 1$ ) et un recouvrement partiel ( $\delta = 0.6$ ). L'effet de courbure intervient au niveau de la zone courante pour la contrainte de pelage. L'ordre de grandeur de cet impact est de 1 MPa. Ceci explique que l'effet reste presque invisible lorsque le renforcement devient partiel (l'ordre de grandeur des contraintes en jeu n'est plus comparable). Le tableau 6.2 permet de confirmer que les effets de courbure n'ont pas une grosse influence sur les valeurs de pic de contrainte de pelage. Lorsque les effets du second ordre sont négligés, la contrainte de pelage est sous estimée d'environ 7.5% pour  $0.4 \leq \delta \leq 0.8$ . Pour un renforcement intégral, il est important de prendre en compte les effets du second ordre pour obtenir la répartition de contrainte correcte en zone courante.

Les figures 6.3 et 6.4 présentent la contrainte de cisaillement au milieu de l'adhésif le long de la zone de recouvrement. Elles comparent l'influence des effets de courbure sur la contrainte de cisaillement pour un recouvrement intégral (i.e.  $\delta = 1$ ) et un recouvrement partiel ( $\delta = 0.6$ ). Pour les deux cas étudiés, les effets de courbure ne modifient pas sensiblement la répartition de contrainte de cisaillement au sein de l'adhésif. Ces résultats se retrouvent dans le tableau 6.2. Les valeurs des pics de contrainte de cisaillement restent relativement proches de la solution complète, la suppression des effets du second ordre conduit à surestimer la contrainte de cisaillement d'environ 5%.

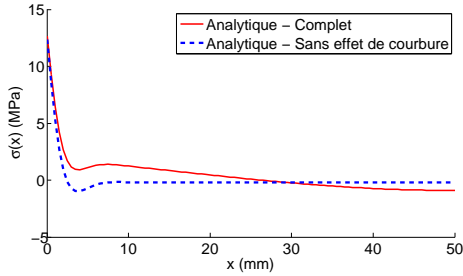


FIGURE 6.1 – Influence des effets de courbure sur la contrainte de pelage en flexion sous charge répartie ( $\delta = 1$ ).

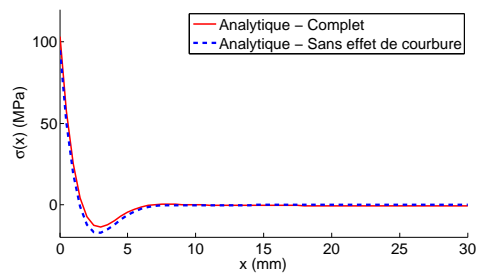


FIGURE 6.2 – Influence des effets de courbure sur la contrainte de pelage en flexion sous charge répartie ( $\delta = 0.6$ ).

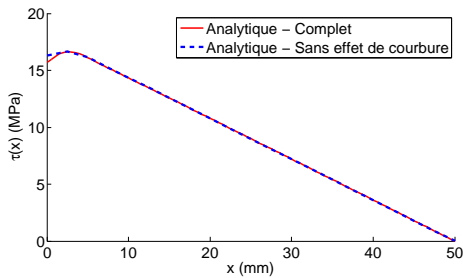


FIGURE 6.3 – Influence des effets de courbure sur la contrainte de cisaillement en flexion sous charge répartie ( $\delta = 1$ ).

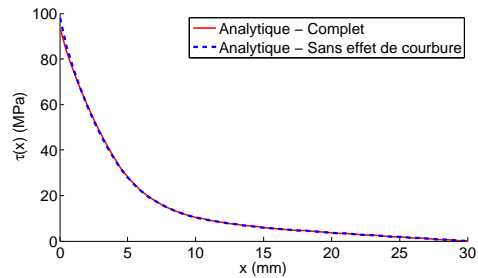


FIGURE 6.4 – Influence des effets de courbure sur la contrainte de cisaillement en flexion sous charge répartie ( $\delta = 0.6$ ).

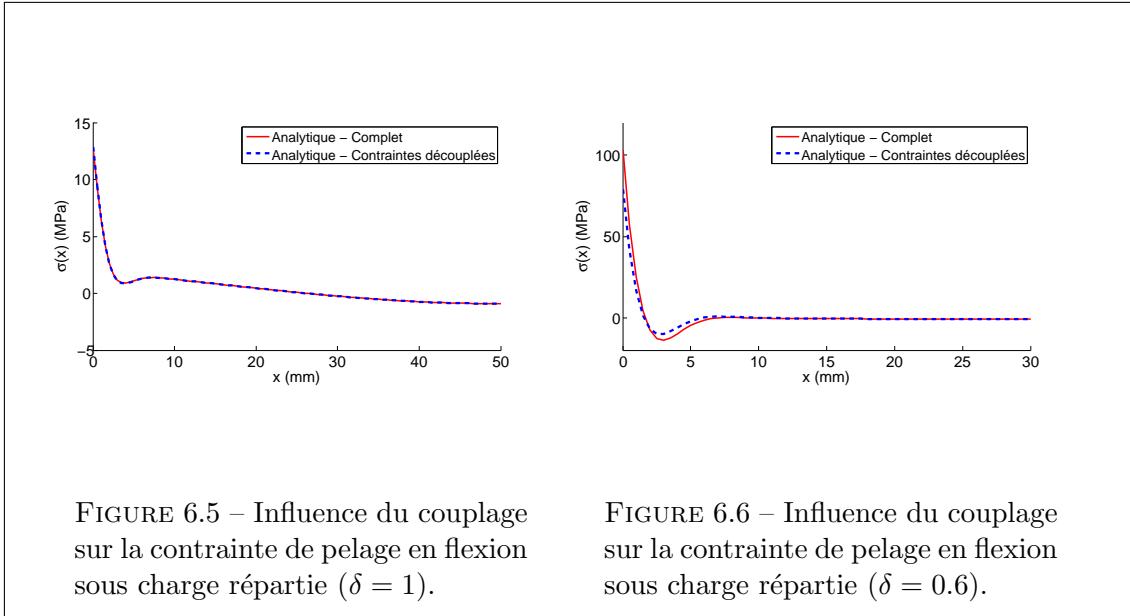
		$\delta$	1	0.8	0.6	0.4
Modèle complet	$\sigma_{\max}$ (MPa)		12.6	64.6	103.2	128.1
	$\tau_{\max}$ (MPa)		15.7	59.3	93.6	118.1
Modèle sans effet de courbure	$\sigma_{\max}$ (MPa)		12.4	59.1	95	119.8
	$\tau_{\max}$ (MPa)		16.3	62.7	98	122.1
Différence	$\sigma_{\max}$ (%)		-1.6	-8.5	-7.9	-6.5
	$\tau_{\max}$ (%)		+3.8	+5.7	+4.7	+3.4

TABLE 6.2 – Comparaison des pics de contraintes de cisaillement et de pelage en flexion sous charge répartie pour diverses valeurs de  $\delta$  (Modèle complet/Modèle sans effet de courbure).

### 6.1.2 Influence du couplage des contraintes de cisaillement et de pelage

Pour négliger le couplage dans la solution précédente, il suffit de supprimer les termes en  $\sigma$  et  $\tau$  dans les second membres des équations 4.38 et 4.39.

Les figures 6.5 et 6.6 présentent la contrainte de pelage au milieu de l'adhésif le long de la zone de recouvrement. Elles comparent l'influence du couplage sur la contrainte de pelage pour un recouvrement intégral (i.e.  $\delta = 1$ ) et un recouvrement partiel ( $\delta = 0.6$ ). Le couplage intervient principalement en extrémité, dans la zone de pic de contrainte. Lorsque le renforcement est intégral, le couplage n'influe pas sur la répartition de la contrainte. En revanche, dans le cas d'un renforcement partiel, le couplage accentue le pic de contrainte en extrémité. Le tableau 6.3 permet de confirmer que le couplage augmente d'environ 25% le pic de contrainte de pelage pour un renforcement partiel lorsque  $0.4 \leq \delta \leq 0.8$ .



Les figures 6.7 et 6.8 présentent la contrainte de cisaillement au milieu de l'adhésif le long de la zone de recouvrement. Elles comparent l'influence du couplage sur la contrainte de cisaillement pour un recouvrement intégral (i.e.  $\delta = 1$ ) et un recouvrement partiel ( $\delta = 0.6$ ). Comme pour la contrainte de pelage, le couplage accentue le pic en extrémité

		$\delta$	1	0.8	0.6	0.4
Modèle complet	$\sigma_{\max}$ (MPa)		12.6	64.6	103.2	128.1
	$\tau_{\max}$ (MPa)		16.3	59.3	93.6	118.1
Modèle découplé	$\sigma_{\max}$ (MPa)		12.8	51.6	79	94.6
	$\tau_{\max}$ (MPa)		16.3	50.6	77.2	96.2
Différence	$\sigma_{\max}$ (%)		+1.6	-20.1	-23.4	-26.2
	$\tau_{\max}$ (%)		0	-14.7	-17.5	-18.5

TABLE 6.3 – Comparaison des pics de contraintes de cisaillement et de pelage en flexion sous charge répartie pour diverses valeurs de  $\delta$  (Modèle complet/Modèle découplé).

d'environ 17% (Cf. Tableau 6.3) pour un renforcement partiel ( $0.4 \leq \delta \leq 0.8$ ).

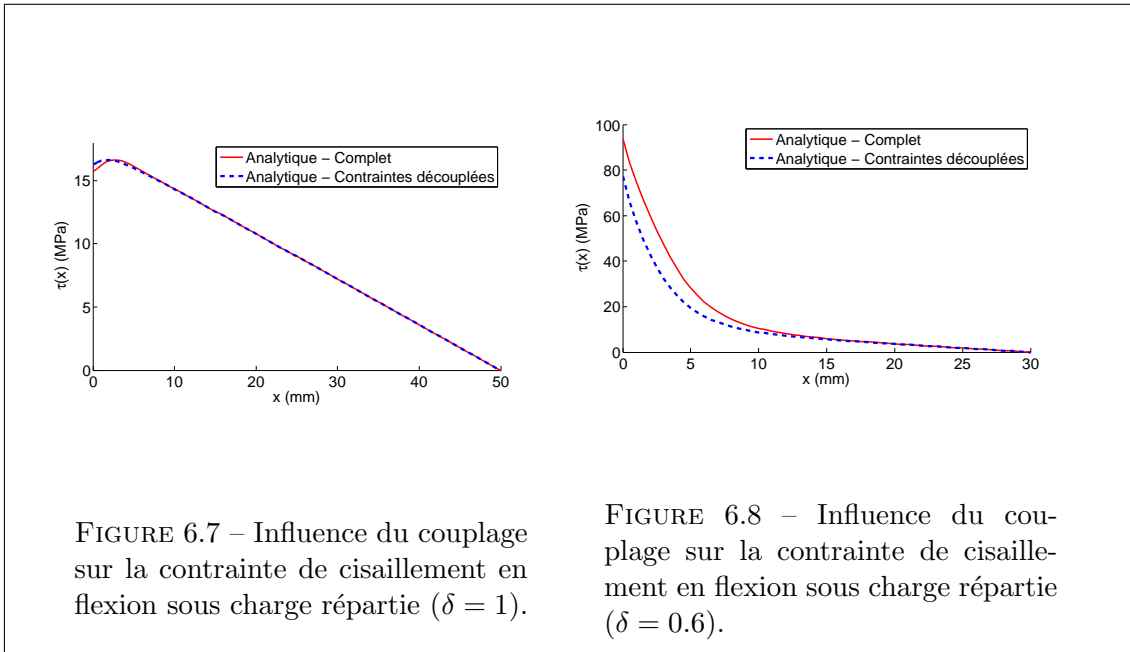


FIGURE 6.7 – Influence du couplage sur la contrainte de cisaillement en flexion sous charge répartie ( $\delta = 1$ ).

FIGURE 6.8 – Influence du couplage sur la contrainte de cisaillement en flexion sous charge répartie ( $\delta = 0.6$ ).

## 6.2 Cas d'une poutre renforcée comprimée

La structure est soumise à une charge de compression  $N = 300$  N. Les autres efforts sont nuls (i.e.  $P = q_1 = q_3 = 0$ ).

### 6.2.1 Influence des effets de courbure

Pour négliger les effets de courbure dans la solution précédente, il suffit de prendre  $\varphi = 0$  dans les équations 4.38 et 4.39.

Les figures 6.9 et 6.10 présentent la contrainte de pelage au milieu de l'adhésif le long de la zone de recouvrement. Elles comparent l'influence des effets de courbure sur la contrainte de pelage pour un recouvrement intégral (i.e.  $\delta = 1$ ) et un recouvrement partiel ( $\delta = 0.6$ ). L'effet de courbure intervient au niveau de la zone courante pour la contrainte

de pelage. L'ordre de grandeur de cet impact est inférieur à 1 MPa, ce qui explique que cet effet est peu visible dans le cas d'un renforcement partiel. En effet l'ordre de grandeur des contraintes augmente fortement lorsque  $\delta$  diminue. En revanche, l'influence sur le pic de contrainte n'est pas négligeable. Dans le cas  $\delta = 0.6$ , le modèle sans effet du second ordre sous estime la contrainte de pelage maximale de 50%. Le tableau 6.4 permet de confirmer cette tendance sur les renforcements partiels. Pour un renforcement intégral, il est important de prendre en compte les effets du second ordre pour obtenir la répartition de contrainte correcte en zone courante.

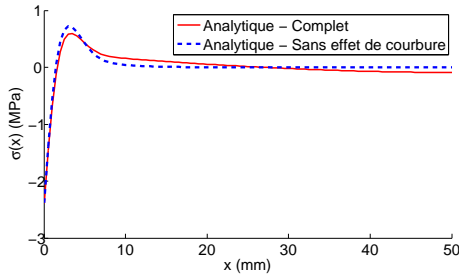


FIGURE 6.9 – Influence des effets de courbure sur la contrainte de pelage en flambage ( $\delta = 1$ ).

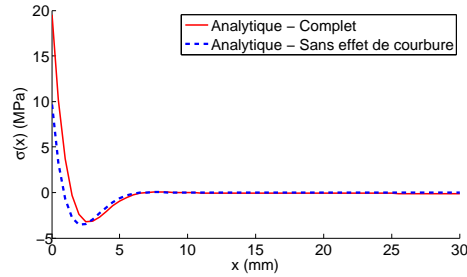


FIGURE 6.10 – Influence des effets de courbure sur la contrainte de pelage en flambage ( $\delta = 0.6$ ).

Les figures 6.11 et 6.12 présentent la contrainte de cisaillement au milieu de l'adhésif le long de la zone de recouvrement. Elles comparent l'influence des effets de courbure sur la contrainte de cisaillement pour un recouvrement intégral (i.e.  $\delta = 1$ ) et un recouvrement partiel ( $\delta = 0.6$ ). Pour les deux cas étudiés, les effets de courbure influent sur la zone courante. La différence de pic de contrainte s'explique par cette différence de comportement en zone courante. La solution particulière n'est pas correctement identifiée lorsque les effets du second ordre sont négligés. Il en résulte un décalage pour le pic de contrainte de cisaillement même si l'ordre de grandeur reste comparable. Ces résultats se retrouvent dans le tableau 6.4. La solution n'étant pas correctement définie, les pics de contrainte dans le cas où les effets du second ordre sont négligés peuvent différer jusqu'à 200%.

### 6.2.2 Influence du couplage des contraintes de cisaillement et de pelage

Pour négliger le couplage dans la solution précédente, il suffit de supprimer les termes en  $\sigma$  et  $\tau$  dans les seconds membres des équations 4.38 et 4.39.

Les figures 6.13 et 6.14 présentent la contrainte de pelage au milieu de l'adhésif le long de la zone de recouvrement. Elles comparent l'influence du couplage sur la contrainte de pelage pour un recouvrement intégral (i.e.  $\delta = 1$ ) et un recouvrement partiel ( $\delta = 0.6$ ). Comme dans le cas de la flexion, le couplage intervient principalement en extrémité, dans la zone de pic de contrainte. Le tableau 6.5 permet de montrer que le couplage améliore

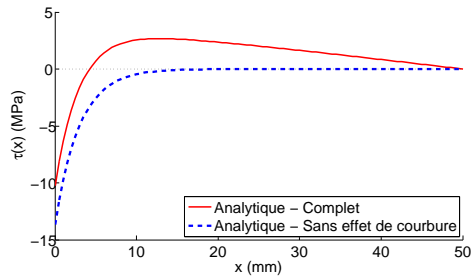


FIGURE 6.11 – Influence des effets de courbure en flambage sur la contrainte de cisaillement ( $\delta = 1$ ).

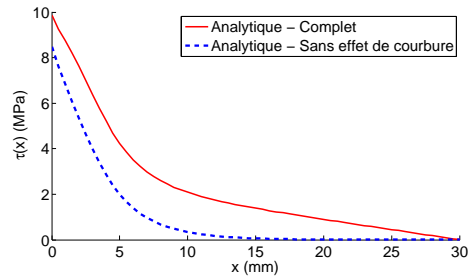


FIGURE 6.12 – Influence des effets de courbure sur la contrainte de cisaillement en flambage ( $\delta = 0.6$ ).

		$\delta$	1	0.8	0.6	0.4
Modèle complet	$\sigma_{\max}$ (MPa)		-2.4	7.6	19.6	148.4
	$\tau_{\max}$ (MPa)		-10.2	-1.2	9.9	122
Modèle sans effet de courbure	$\sigma_{\max}$ (MPa)		-2.4	3.1	9.7	74.5
	$\tau_{\max}$ (MPa)		-13.7	-3.6	8.5	127.5
Différence	$\sigma_{\max}$ (%)		0	-59.2	-50.5	-49.8
	$\tau_{\max}$ (%)		+34.3	+200	-14	+4.5

TABLE 6.4 – Comparaison des pics de contraintes de cisaillement et de pelage en flambage pour diverses valeurs de  $\delta$  (Modèle complet/Modèle sans effet de courbure).



considérablement le pic de contrainte de pelage.

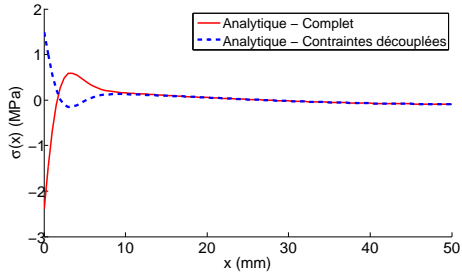


FIGURE 6.13 – Influence du couplage sur la contrainte de pelage en flambage ( $\delta = 1$ ).

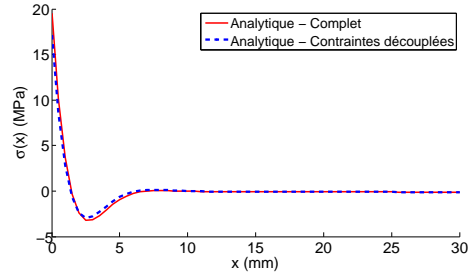


FIGURE 6.14 – Influence du couplage sur la contrainte de pelage en flambage ( $\delta = 0.6$ ).

Les figures 6.15 et 6.16 présentent la contrainte de cisaillement au milieu de l'adhésif le long de la zone de recouvrement. Elles comparent l'influence du couplage sur la contrainte de cisaillement pour un recouvrement intégral (i.e.  $\delta = 1$ ) et un recouvrement partiel ( $\delta = 0.6$ ). Comme pour la contrainte de pelage, le couplage accentue la précision du pic en extrémité d'environ 10 – 30% selon la valeur de  $\delta$  (Cf. Tableau 6.5).

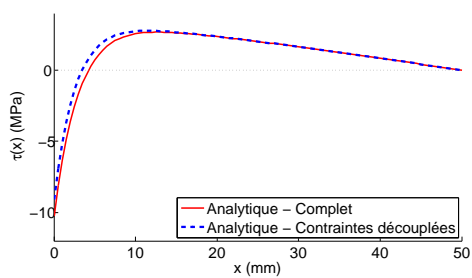


FIGURE 6.15 – Influence du couplage sur la contrainte de cisaillement en flambage ( $\delta = 1$ ).

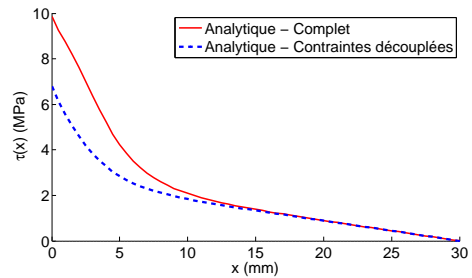


FIGURE 6.16 – Influence du couplage sur la contrainte de cisaillement en flambage ( $\delta = 0.6$ ).

		$\delta$	1	0.8	0.6	0.4
Modèle complet	$\sigma_{\max}$ (MPa)		-2.4	7.6	19.6	148.4
	$\tau_{\max}$ (MPa)		-10.2	-1.2	9.6	122
Modèle découplé	$\sigma_{\max}$ (MPa)		1.5	8.7	17.2	113.7
	$\tau_{\max}$ (MPa)		-9.1	-1.9	6.8	97.2
Différence	$\sigma_{\max}$ (%)		+162	+14.5	-12.2	-23.4
	$\tau_{\max}$ (%)		-10.8	-14.7	-29.2	-20.3

TABLE 6.5 – Comparaison des pics de contraintes de cisaillement et de pelage en flambage pour diverses valeurs de  $\delta$  (Modèle complet/Modèle découplé).

	Effets du second ordre	Couplage
Contrainte de cisaillement	Zone courante	Pic de contrainte
	Pic de contrainte	
Contrainte de pelage	Zone courante	Pic de contrainte
	Pic de contrainte	

TABLE 6.6 – Conclusion sur l'influence des hypothèses simplificatrices rencontrées dans la littérature sur les contraintes de cisaillement et de pelage.

## 6.3 Conclusion

Le tableau 6.6 récapitule l'influence des effets du second ordre et du couplage sur les contraintes de cisaillement et de pelage. A la vue des exemples précédents, les effets du second ordre conditionnent la solution particulière. Cette modification reste en général inférieure à quelques MPa pour la contrainte de pelage en zone courante. Dans le cas de la poutre renforcée comprimée, l'influence est plus importante sur la répartition en zone courante de la contrainte de cisaillement : le comportement en zone courante n'est pas correctement décrit. Il s'ensuit, par le biais de la condition aux limites visant à respecter l'équilibre statique dans la direction transverse, une modification des pics de contrainte de pelage et de cisaillement dans tous les cas.

L'effet de couplage est surtout sensible au voisinage des extrémités du renfort. Il contribue à augmenter le pic de contrainte de l'ordre de 20% pour le pelage et de 15% pour le cisaillement.



Troisième partie

Validation du modèle



## Chapitre 7

# Validation par comparaison avec des modèles numériques

---

<b>7.1</b>	<b>Cas du joint à simple recouvrement . . . . .</b>	<b>100</b>
7.1.1	Présentation du modèle . . . . .	100
7.1.2	Modélisation . . . . .	101
7.1.3	Comparaison des résultats numériques et analytiques . . . . .	102
<b>7.2</b>	<b>Cas d'une poutre renforcée . . . . .</b>	<b>105</b>
7.2.1	Présentation du modèle . . . . .	105
7.2.2	Modélisation . . . . .	107
7.2.3	Cas d'une poutre renforcée en flexion trois points . . . . .	108
7.2.4	Cas d'une poutre renforcée sous charge répartie . . . . .	109
7.2.5	Cas d'une poutre renforcée sous chargement thermique . . . . .	112
7.2.6	Cas d'une poutre renforcée comprimée . . . . .	115
<b>7.3</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>117</b>

---

Cette partie s'intéresse à valider la solution analytique présentée précédemment. Pour ce faire, le modèle analytique est comparé à des modèles numériques construits sur des hypothèses correspondant à celles du modèle analytique. Deux configurations d'assemblage sont étudiées sous divers chargements. Dans la partie suivante, les hypothèses sur lesquelles le modèle analytique est fondé seront discutées en comparant la solution à des résultats expérimentaux.

## 7.1 Cas du joint à simple recouvrement

### 7.1.1 Présentation du modèle

Le modèle étudié dans cette partie correspond à la configuration présentée dans l'article de Goland et Reissner de 1944 [46]. Deux substrats rectangulaires sont assemblés par collage par l'intermédiaire d'une zone de recouvrement de longueur  $2L_r$ . Les deux substrats sont choisis identiques (i.e.  $t_1 = t_3$  et  $E_1 = E_3$ ) pour permettre la comparaison avec le modèle de la littérature (Figure 7.1). Le substrat gauche (3) est maintenu en son extrémité par une liaison pivot. Une force de traction  $T$  par unité de largeur est appliquée au substrat droit (1). Ce chargement génère un effort de cisaillement et de pelage au sein du joint de colle. Le paramètre  $\delta$  est introduit pour définir la proportion de recouvrement ( $\delta = L_r/L$ ). Ainsi  $\delta$  peut être fixé entre 0 et 1. L'origine des  $x$  est prise au bord de la zone de recouvrement, au milieu du joint.

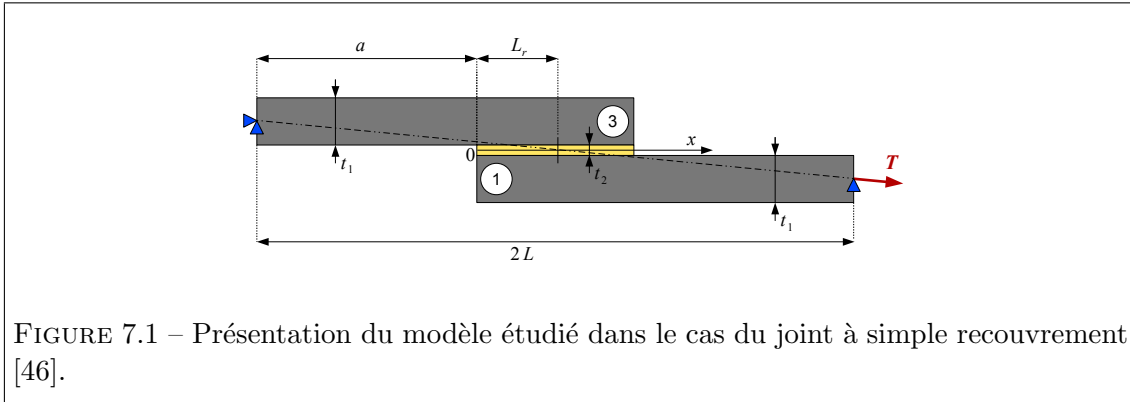


FIGURE 7.1 – Présentation du modèle étudié dans le cas du joint à simple recouvrement [46].

La solution de Goland et Reissner est la plus connue concernant la configuration d'un joint à simple recouvrement. Les deux auteurs font l'hypothèse que les déformations de cisaillement dans les adhérents restent négligeables par rapport à la déformation dans l'adhésif. Les équations suivantes correspondent aux contraintes de cisaillement  $\tau_{GR}$  et de pelage  $\sigma_{GR}$  au sein d'une jonction relativement flexible définies par Goland et Reissner.

$$\tau_{GR}(x) = \frac{-T}{8L_r} \left[ \frac{\beta L_r}{t_1} (1 + 3k) \frac{\cosh \frac{\beta x}{t_1}}{\sinh \frac{\beta L_r}{t_1}} + 3(1 - k) \right] \quad (7.1)$$

$b = 30 \text{ mm}$	$t_1 = 4 \text{ mm}$	$E_1 = 72 \text{ GPa}$	$\nu_1 = 0.3$
$L = 100 \text{ mm}$	$t_2 = 0.2 \text{ mm}$	$E_2 = 1.95 \text{ GPa}$	$\nu_2 = 0.3$
$T = 600 \text{ N.mm}^{-1}$			

TABLE 7.1 – Données numériques utilisées dans le cas du joint à simple recouvrement.

$$\sigma_{GR}(x) = \frac{Tt_1}{L_r^2 \Delta} \left[ \left( R_2 \lambda_{GR}^2 \frac{k}{2} + \lambda_{GR} k' \cosh \lambda_{GR} \cos \lambda_{GR} \right) \cosh \frac{\lambda_{GR} x}{L_r} \cos \frac{\lambda_{GR} x}{L_r} \right. \\ \left. + \left( R_1 \lambda_{GR}^2 \frac{k}{2} + \lambda_{GR} k' \sinh \lambda_{GR} \sin \lambda_{GR} \right) \sinh \frac{\lambda_{GR} x}{L_r} \sin \frac{\lambda_{GR} x}{L_r} \right] \quad (7.2)$$

Avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = \sqrt{\frac{8G_2 t_1}{E_1 t_2}}, \quad \gamma_{GR} = \left( \frac{6E_2 t_1}{E_1 t_2} \right)^{1/4}, \quad \lambda_{GR} = \frac{\gamma_{GR} L_r}{t_1} \\ D_1^{GR} = \frac{E_1 t_1^3}{12(1 - \nu_1^2)} \quad \text{et} \quad D_2^{GR} = 8D_1^{GR} \\ v_1 = \sqrt{\frac{T}{D_1^{GR}}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{T}{D_2^{GR}}} \\ k = \frac{\cosh v_2 L_r}{\cosh v_2 L_r + 2\sqrt{2} \sinh v_2 L_r} \\ T_0 = kT \sqrt{3(1 - \nu_1^2) \frac{T}{t_1 E_1}}, \quad k' = k \frac{L_r}{t_1} \sqrt{\frac{3T}{t_1 \tilde{E}_1}} \\ R_1 = \cosh \lambda_{GR} \sin \lambda_{GR} + \sinh \lambda_{GR} \cos \lambda_{GR} \\ R_2 = \sinh \lambda_{GR} \cos \lambda_{GR} - \cosh \lambda_{GR} \sin \lambda_{GR} \\ \Delta = \frac{1}{2} (\sinh 2\lambda_{GR} + \sin 2\lambda_{GR}) \end{array} \right. \quad (7.3)$$

Les valeurs numériques utilisées sont présentées table 7.1. Les adhérents sont en aluminium. La valeur du module d'Young retenue pour l'adhésif correspond à celle de la FM73 [110, 112] (adhésif utilisé dans le domaine de l'aéronautique).

### 7.1.2 Modélisation

Afin de valider le modèle analytique, nous avons réalisé un modèle numérique sous ANSYS. Pour se rapprocher au mieux des hypothèses retenues pour le modèle analytique, les différents composants sont supposés suivre un comportement élastique linéaire défini par  $E$  et  $\nu$  (Table 7.1). Les dimensions géométriques sont données dans la table 7.1. Les éléments utilisés sont de type PLANE183, élément quadrangulaire plan à 8 noeuds [3]. Chaque noeud possède deux degrés de liberté : translation suivant les directions  $x$  et  $z$ . L'élément prend en compte les effets non-linéaires géométriques. Les contraintes obtenues correspondent au tenseur de Cauchy.



Le joint collé est une partie délicate à modéliser si l'on ne veut pas augmenter considérablement le nombre d'éléments. En effet, l'épaisseur de la colle est très petite devant la longueur du substrat et du renfort. Il est fréquent d'utiliser le maillage présenté figure 7.2 pour obtenir une bonne précision dans la zone de l'adhésif. La partie claire au milieu de l'épaisseur correspond au joint de colle. La convergence du maillage a été étudiée pour

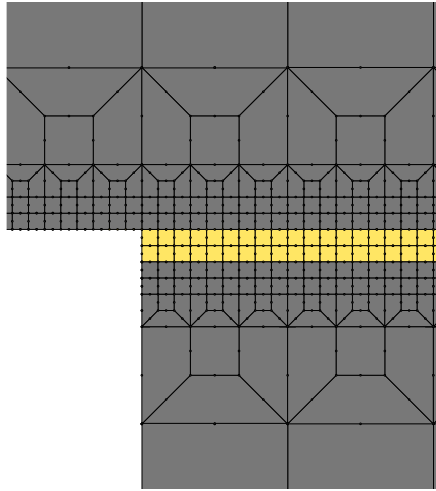


FIGURE 7.2 – Raffinement du maillage à proximité de l'adhésif sur la configuration d'un joint à simple recouvrement.

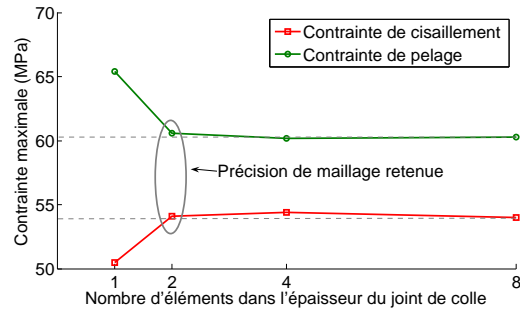


FIGURE 7.3 – Etude de la convergence de maillage pour  $\delta = 0.4$ . Ce cas, correspond une situation défavorable au niveau des pics de contrainte en extrémité : la courbure augmente lorsque la zone de recouvrement diminue.

les différentes valeurs de  $\delta$  étudiées. Pour exemple, la figure 7.3 présente l'évolution des pics de contrainte de cisaillement et de pelage en extrémité au milieu de l'adhésif pour  $\delta = 0.4$ . Ce cas correspond à une situation relativement défavorable pour l'adhésif (les pics de contrainte augmentent avec la flèche, i.e. la longueur de recouvrement diminue). A partir de deux éléments dans l'épaisseur du joint de colle, le pic de contrainte en extrémité se stabilise. La précision de maillage retenue correspond à deux éléments dans l'épaisseur de joint (Figure 7.2).

### 7.1.3 Comparaison des résultats numériques et analytiques

Cette partie présente la comparaison des résultats obtenus par la formule de Goland et Reissner, la solution analytique développée dans le cadre de cette thèse ainsi que les résultats obtenus par le modèle numérique. Les résultats de Goland et Reissner sont ici présentés comme référence dans le cas où les effets du second ordre sont négligés (les tenseurs contrainte de Cauchy et Piola-Kirchhoff sont confondus). Les figures 7.4, 7.7, 7.5 et 7.6 représentent l'évolution des contraintes calculées au milieu de l'épaisseur de l'adhésif pour diverses valeurs de  $\delta$ . Elles mettent en évidence la concordance des résultats numériques avec les résultats analytiques de la solution développée dans la partie précédente.

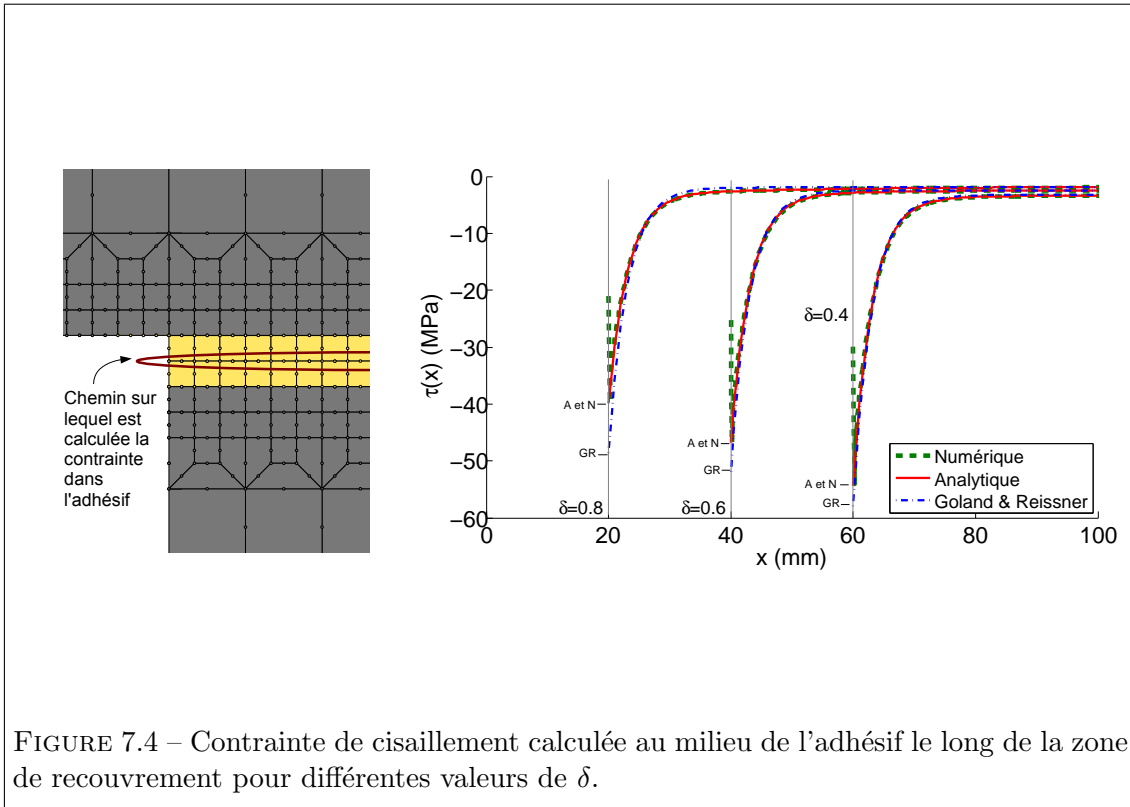


FIGURE 7.4 – Contrainte de cisaillement calculée au milieu de l'adhésif le long de la zone de recouvrement pour différentes valeurs de  $\delta$ .

La figure 7.4 représente l'évolution de la contrainte de cisaillement calculée au milieu de l'adhésif le long de la zone de recouvrement (en fonction de  $x$ ). En zone d'extrémité, un pic de contrainte apparaît. Le modèle analytique traduit correctement le phénomène de transfert d'effort entre les deux substrats quelle que soit la proportion de recouvrement  $\delta$ . Les longueurs de transfert et les valeurs de pic sont semblables. La figure 7.5 s'attache à comparer cette valeur de pic en fonction du taux de renforcement  $\delta$ . Le pic est correctement décrit par le modèle analytique. De plus, le modèle apporte une amélioration du modèle de Goland et Reissner pouvant atteindre 30% suivant les configurations étudiées.

La figure 7.7 représente l'évolution de la contrainte de pelage calculée au milieu de l'adhésif le long de la zone de recouvrement pour différentes valeurs de  $\delta$ . Comme pour la contrainte de cisaillement, en zone d'extrémité, un pic de contrainte apparaît. Le comportement en extrémité est convenablement pris en compte dans le modèle analytique. La figure 7.6 compare la valeur maximale en fonction de  $\delta$ . Cette valeur est correctement calculée par le modèle analytique. De plus, le modèle apporte une amélioration du modèle de Goland et Reissner pouvant atteindre 80% suivant les configurations étudiées.

La bonne évaluation du pic de contrainte permet de dimensionner le joint de colle. Le couplage complexe des contraintes de cisaillement et de pelage nécessite d'utiliser des critères de rupture. Pour exemple, la figure 7.8 présente la contrainte équivalente définie par Gali & Ishaï spécifiquement pour les adhésifs [44] (Cf. équation 2.32). Cette figure montre une bonne concordance entre les valeurs données par les modèles numériques et analytiques. En revanche, la formulation de Goland & Reissner surestime la contrainte équivalente d'environ 30 – 40% lorsque la longueur de recouvrement devient importante

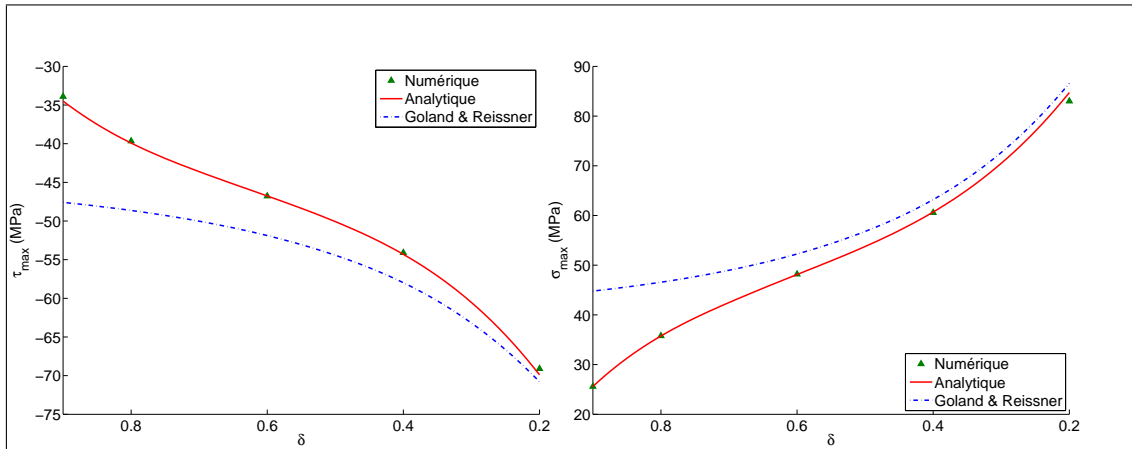


FIGURE 7.5 – Contrainte de cisaillement maximale au milieu de l'adhésif en fonction de  $\delta$  (en extrémité).

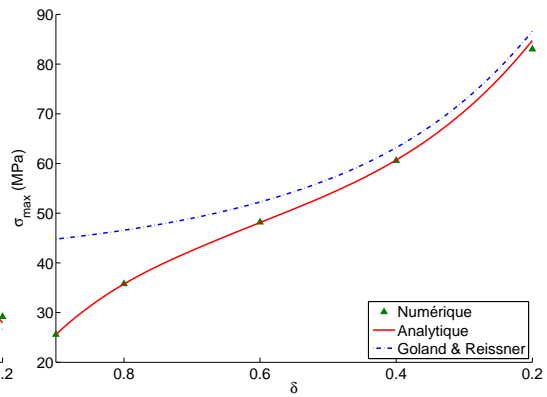


FIGURE 7.6 – Contrainte de pelage maximale au milieu de l'adhésif en fonction de  $\delta$  (en extrémité).

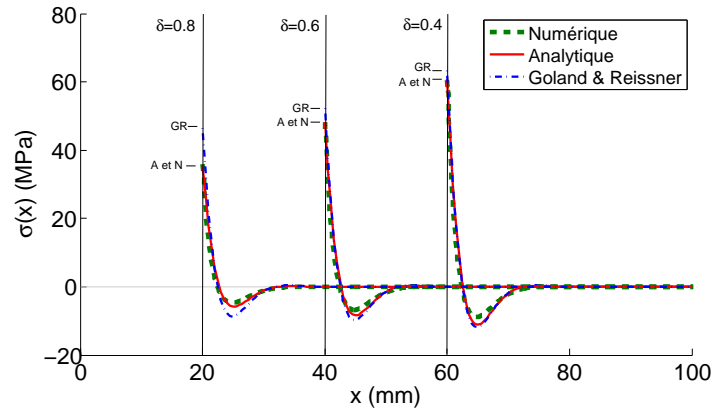
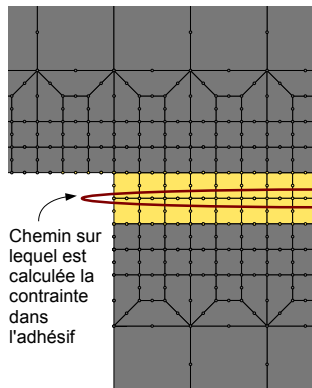


FIGURE 7.7 – Contrainte de pelage calculée au milieu de l'adhésif le long de la zone de recouvrement pour différentes valeurs de  $\delta$ .

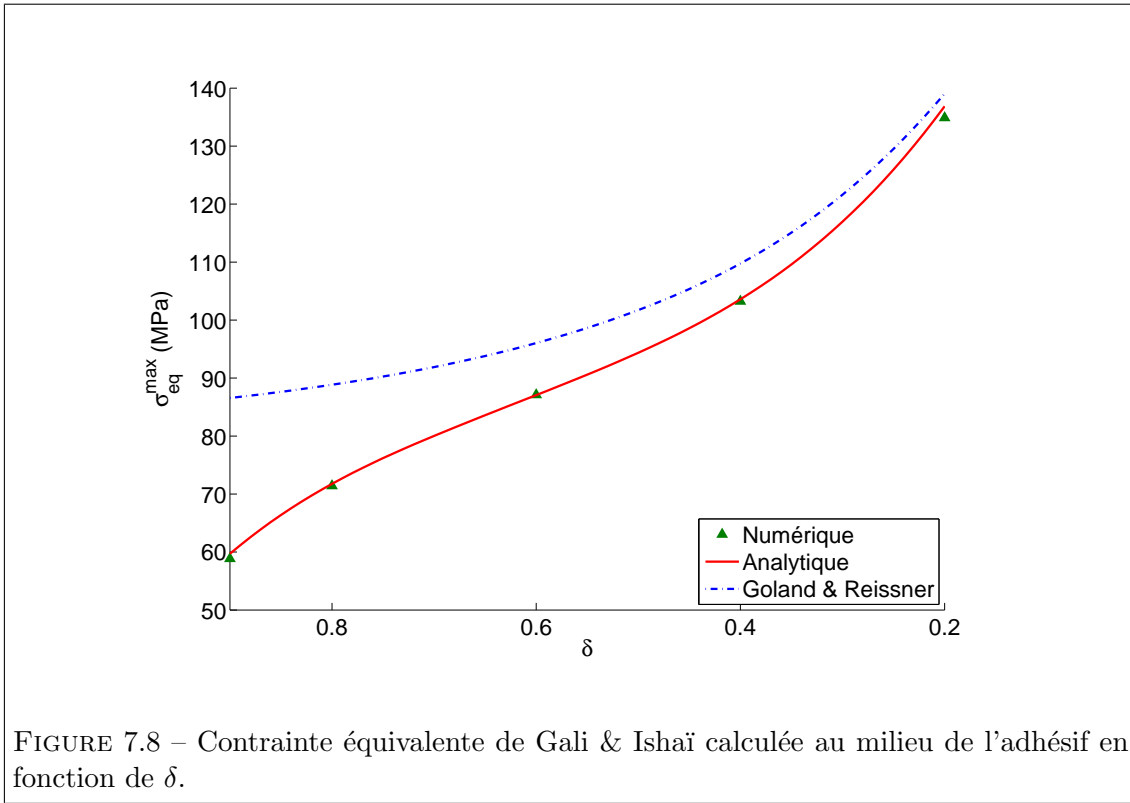


FIGURE 7.8 – Contrainte équivalente de Gali & Ishaï calculée au milieu de l'adhésif en fonction de  $\delta$ .

par rapport à la longueur des substrats.

La très bonne concordance entre les résultats analytiques et numériques confirme l'importance de prendre en compte les effets non linéaires géométriques et le couplage entre les contraintes de cisaillement et de pelage.

## 7.2 Cas d'une poutre renforcée

### 7.2.1 Présentation du modèle

Le modèle étudié dans cette partie correspond à la configuration d'un renfort collé sur une structure dans le but de diminuer le niveau de contrainte au sein du composant renforcé. Le renfort rectangulaire est collé sur un substrat en général plus long. La zone de collage, appelée zone de recouvrement, est de longueur  $2L_r$ . L'assemblage est simplement appuyé à ses extrémités (Figure 7.9). Différents cas de chargement sont étudiés (charge répartie, force ponctuelle, flambage, chargement thermique).

Divers chargements sont appliqués sur l'assemblage. Ils génèrent un effort de cisaillement et de pelage au sein du joint de colle. Le paramètre  $\delta$  est introduit pour définir la proportion de recouvrement ( $\delta = L_r/L$ ). Ainsi  $\delta$  varie entre 0 et 1. Lorsque  $\delta$  tend vers 0 la longueur de recouvrement  $L_r$  tend vers 0.

Les valeurs numériques utilisées sont présentées dans le tableau 7.2. Le substrat 1 est en aluminium. Le renfort (composant 3) est en acier. La valeur du module d'Young retenue pour l'adhésif correspond à celle de la FM73 [110, 112] (adhésif utilisé dans le domaine de l'aéronautique). Les dimensions géométriques choisies sont relativement petites par

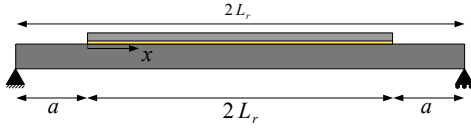


FIGURE 7.9 – Présentation du modèle étudié dans le cas d'une poutre renforcée.

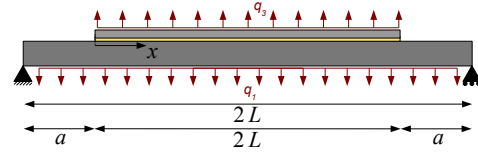


FIGURE 7.11 – Présentation du modèle étudié dans le cas d'une poutre renforcée sous charge répartie.

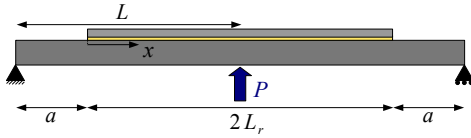


FIGURE 7.10 – Présentation du modèle étudié dans le cas d'une poutre renforcée en flexion trois points.

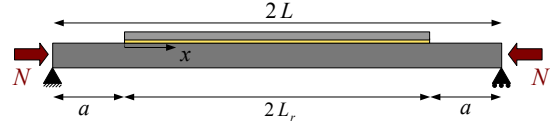


FIGURE 7.12 – Présentation du modèle étudié dans le cas d'une poutre renforcée comprimée.

$b = 1 \text{ mm}$	$t_1 = 3 \text{ mm}$	$E_1 = 72 \text{ GPa}$	$\nu_1 = 0.3$	$\alpha_1 = 23.10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$
$L = 50 \text{ mm}$	$t_2 = 0.2 \text{ mm}$	$E_2 = 1.95 \text{ GPa}$	$\nu_2 = 0.3$	$\alpha_2 = 23.10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$
	$t_3 = 1 \text{ mm}$	$E_3 = 200 \text{ GPa}$	$\nu_3 = 0.3$	$\alpha_3 = 12.10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$

TABLE 7.2 – Données numériques utilisées dans le cas d'une poutre renforcée.

rapport à la réalité. Cependant, elles permettent de réaliser des modèles numériques de taille réduite, donc de résolution plus rapide. Ces dimensions permettent tout de même d'étudier le phénomène de transfert d'effort ( $L \gg l_0$ ).

### 7.2.2 Modélisation

Comme pour le cas précédent, nous avons réalisé un modèle numérique sous ANSYS en utilisant des éléments de type PLANE183 [3]. Pour se rapprocher au mieux des hypothèses retenues par le modèle analytique, les différents composants sont supposés suivre un comportement élastique linéaire défini par  $E$  et  $\nu$  (Cf. tableau 7.2). Les dimensions géométriques sont détaillées dans le tableau 7.2. Le maillage dans la zone à proximité du joint d'adhésif est progressivement affiné. Le maillage présenté figure 7.13 est utilisé pour obtenir une bonne précision dans la zone de l'adhésif. La partie claire au milieu de l'épaisseur correspond au joint de colle.

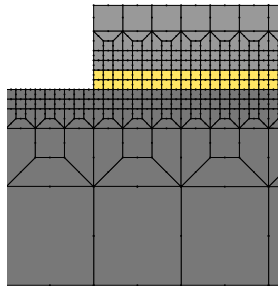


FIGURE 7.13 – Raffinement du maillage à proximité de l'adhésif sur la configuration renfort collé sur un substrat.

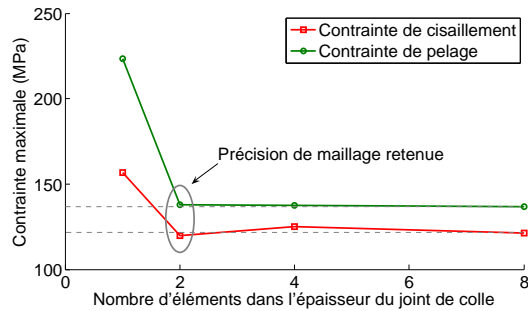


FIGURE 7.14 – Etude de la convergence de maillage pour  $\delta = 0.4$ . Ce cas, correspond une situation défavorable au niveau des pics de contrainte en extrémité : la courbure augmente lorsque la zone de recouvrement diminue.

La convergence en fonction du maillage a été étudiée pour les différentes valeurs de  $\delta$  étudiées. Pour exemple, la figure 7.14 représente l'évolution des pics de contrainte de cisaillement et de pelage en extrémité au milieu de l'adhésif lorsque l'assemblage est soumis à une charge excentrée pour  $\delta = 0.4$  (Figure 7.12). Ce cas correspond à une situation relativement défavorable pour l'adhésif (les pics de contrainte augmentent avec la flèche, i.e. la longueur de recouvrement diminue). A partir de deux éléments dans l'épaisseur du joint de colle, le pic de contrainte en extrémité se stabilise. La taille du maillage retenue correspond à deux éléments dans l'épaisseur de joint (Figure 7.13). Ce maillage permet d'obtenir un temps de calcul raisonnable avec le logiciel ANSYS.

### 7.2.3 Cas d'une poutre renforcée en flexion trois points

Le modèle est présenté figure 7.10. Pour l'application numérique,  $P$  est fixé à 50 N. Les résultats sont comparés au modèle de Smith & Teng [106]. Dans ce dernier modèle, les auteurs font l'hypothèse que la contrainte de pelage n'accroît pas la contrainte de cisaillement (phénomène localisé à la zone d'ancrage). Seul l'effort tranchant de la structure équivalente homogène est pris en compte :

$$\frac{d^2\tau(x)}{dx^2} - \lambda_{ST}^2\tau(x) = m_1\lambda_{ST}^2T_0(x) \quad (7.4)$$

Les constantes  $\lambda_{ST}$  et  $m_1$  sont définies ci-dessous. La contrainte de pelage n'influence pas la répartition de la contrainte de cisaillement. Seule la contrainte de cisaillement intervient dans l'équation différentielle de la contrainte de pelage. Smith & Teng définissent les contraintes de cisaillement et de pelage par les équations suivantes :

$$\tau_{ST}(x) = \frac{m_2}{\lambda_{ST}}a\frac{P}{2}e^{-\lambda_{ST}x} + m_1\frac{P}{2} - m_1Pe^{-\lambda_{ST}L_r}\cosh\lambda_{ST}x \quad (7.5)$$

$$\sigma_{ST}(x) = e^{-\beta x} [C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x] - n_1 \frac{d\tau_{ST}(x)}{dx} \quad (7.6)$$

Avec

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = \frac{t_1}{2} \quad , \quad y_3 = \frac{t_3}{2} \\ \lambda_{ST} = \sqrt{k_s b \frac{(y_1 + y_3)(y_1 + y_3 + t_2)}{\tilde{D}_1 + \tilde{D}_3} + \frac{1}{\tilde{A}_1} + \frac{1}{\tilde{A}_3}} \\ m_1 = k_s \frac{1}{\lambda_{ST}} \frac{y_1 + y_3}{\tilde{D}_1 + \tilde{D}_3} \quad , \quad m_2 = k_s \frac{y_1}{\tilde{D}_1} \\ \beta = \sqrt[4]{\frac{k_p b}{4} \left( \frac{1}{\tilde{D}_1} + \frac{1}{\tilde{D}_3} \right)} \\ n_1 = \frac{y_1 \tilde{D}_3 - y_3 \tilde{D}_1}{\tilde{D}_1 + \tilde{D}_3} \quad , \quad n_3 = bk_s \left( \frac{y_1}{\tilde{D}_1} - \frac{y_3}{\tilde{D}_3} \right) \\ M_0(0) = a\frac{P}{2} \quad , \quad T_0(0) = \frac{P}{2} \\ C_1 = \frac{k_p}{2\beta^3 \tilde{D}_1} [T_0(0) + \beta M_0(0)] - \frac{n_3}{2\beta^3} \tau_{ST}(0) \\ \quad + \frac{n_1}{2\beta^3} \left( \frac{d^4 \tau_{ST}(x)}{dx^4} \Big|_{x=0} + \beta \frac{d^3 \tau_{ST}(x)}{dx^3} \Big|_{x=0} \right) \\ C_2 = -\frac{k_p}{2\beta^2 \tilde{D}_1} M_0(0) - \frac{n_1}{2\beta_2} \frac{d^3 \tau_{ST}(x)}{dx^3} \Big|_{x=0} \end{array} \right. \quad (7.7)$$

La solution analytique utilisée est celle développée dans la partie 5.2. Les figures 7.15, 7.18, 7.16 et 7.17 présentent la comparaison des résultats obtenus par le modèle de Smith & Teng, la solution analytique développée dans ce document ainsi que les résultats obtenus

par le modèle numérique. En extrémité, l'allure générale de la contrainte de cisaillement et de pelage est similaire. Une différence apparaît sur la valeur du pic de contrainte calculé.

La figure 7.15 représente l'évolution de la contrainte de cisaillement calculée au milieu de l'adhésif le long de la zone de recouvrement pour  $\delta = 0.8$ . En zone d'extrémité, un pic de contrainte apparaît. Le renfort rentre progressivement en tension afin de limiter la flexion. Ce transfert d'effort génère un pic de cisaillement en extrémité du recouvrement de l'assemblage au sein de l'adhésif. La figure 7.16 s'attache à comparer cette valeur de pic en fonction de  $\delta$ . Ce pic est correctement décrit par le modèle analytique. De plus, le modèle apporte une amélioration du modèle de Smith & Teng pouvant atteindre 16% suivant les configurations étudiées. L'amélioration apparaît surtout pour des longueurs de recouvrement faibles par rapport à la longueur totale  $2L$ . Cette configuration est la plus souvent rencontrée dans le cas du renforcement d'une structure.

La figure 7.18 représente l'évolution de la contrainte de pelage calculée au milieu de l'adhésif le long de la zone de recouvrement pour  $\delta = 0.8$ . Comme pour la contrainte de cisaillement, en zone d'extrémité, un pic de contrainte apparaît. Le renfort n'accompagne pas totalement le substrat en extrémité. Cela crée une force transverse à l'origine du pelage. Suivant la concavité de la flèche, cette force transverse est de traction ou de compression. La figure 7.17 représente cette valeur maximale de contrainte de pelage en fonction de  $\delta$  pour les différents modèles. Cette valeur est correctement calculée par le modèle analytique. De plus, le modèle apporte une amélioration du modèle de Smith & Teng pouvant atteindre 10%.

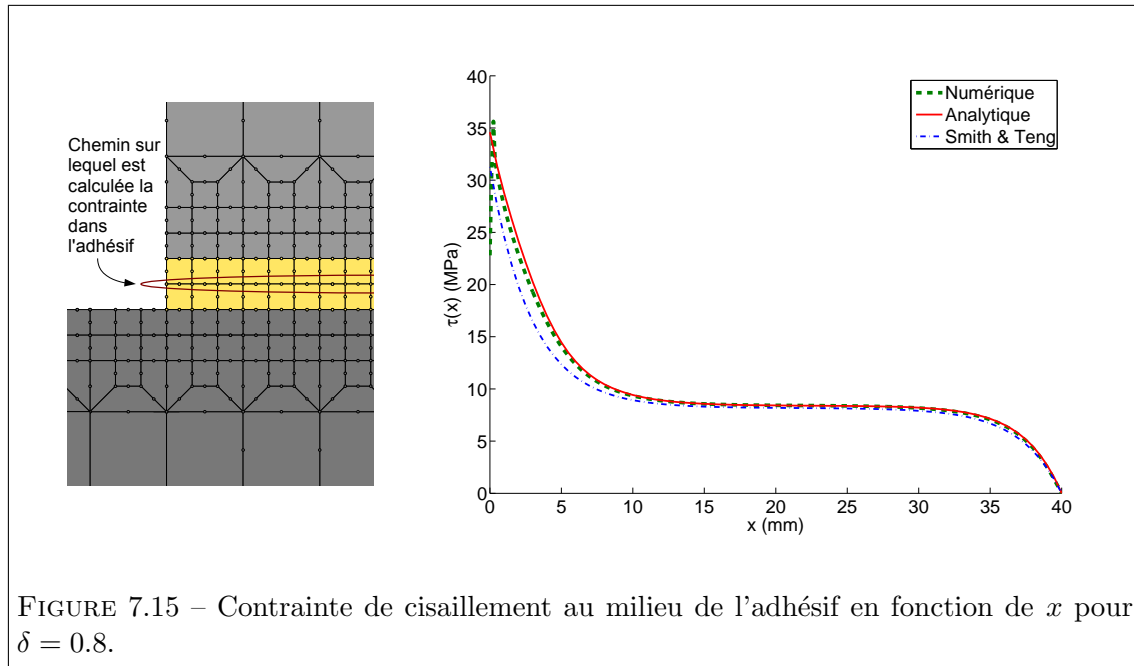


FIGURE 7.15 – Contrainte de cisaillement au milieu de l'adhésif en fonction de  $x$  pour  $\delta = 0.8$ .

#### 7.2.4 Cas d'une poutre renforcée sous charge répartie

Le modèle géométrique est présenté figure 7.11. Pour l'application numérique, plusieurs cas ont été explorés :  $q_1$  est fixé à  $-1 \text{ N.mm}^{-1}$  et  $q_3$  prend les valeurs  $-0.5, 0, 0.5 \text{ N.mm}^{-1}$ . Les résultats sont comparés au modèle de Smith & Teng [106]. Dans ce dernier modèle,



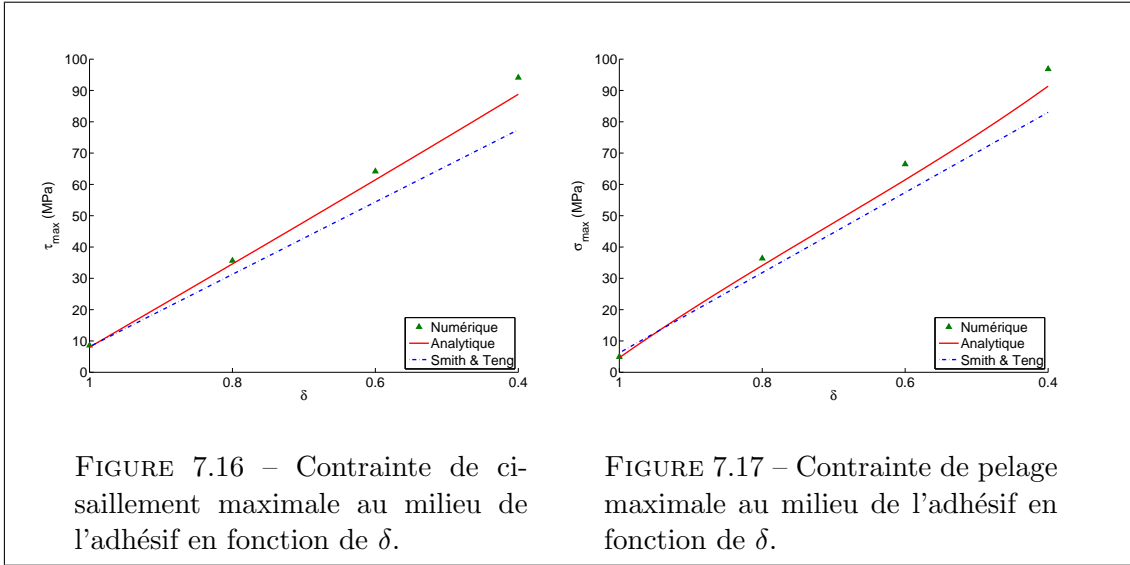


FIGURE 7.16 – Contrainte de cisaillement maximale au milieu de l'adhésif en fonction de  $\delta$ .

FIGURE 7.17 – Contrainte de pelage maximale au milieu de l'adhésif en fonction de  $\delta$ .

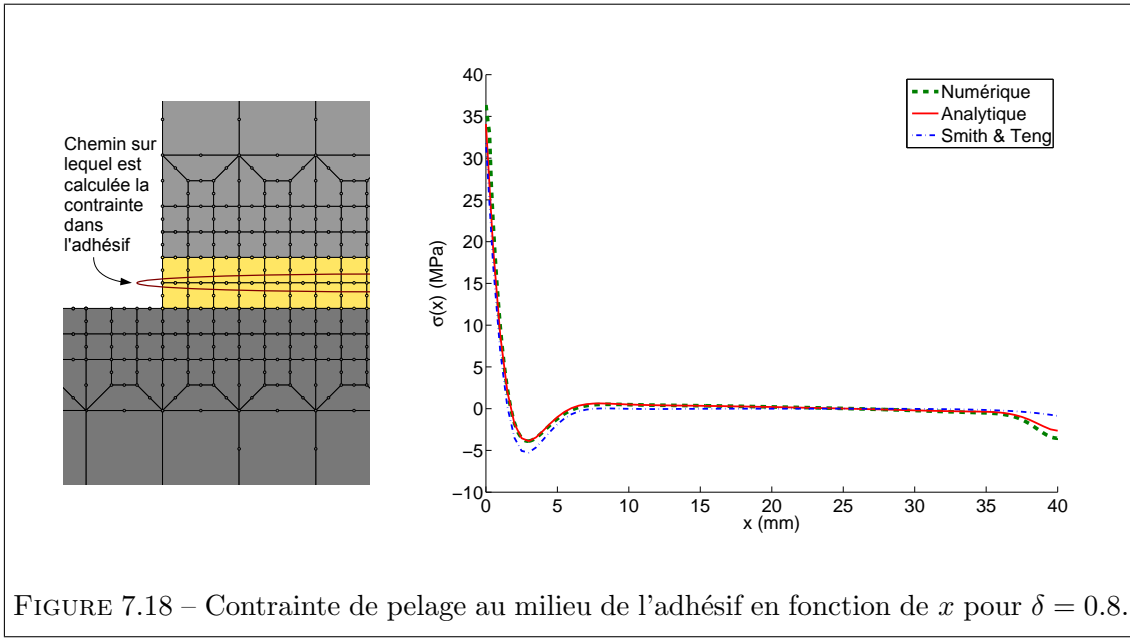
les auteurs font l'hypothèse que la contrainte de pelage n'accroît pas la contrainte de cisaillement (phénomène localisé à la zone d'ancrage). Seul l'effort tranchant de la structure équivalente homogène est pris en compte :

$$\frac{d^2\tau(x)}{dx^2} - \lambda_{ST}^2\tau(x) = m_1\lambda_{ST}^2T_0(x) \quad (7.8)$$

La contrainte de pelage n'influence pas la répartition de la contrainte de cisaillement. Seule la contrainte de cisaillement intervient dans l'équation différentielle de la contrainte de pelage. Smith & Teng définissent les contraintes de cisaillement et de pelage par les équations suivantes :

$$\tau_{ST}(x) = -\left[\frac{m_2a}{2}(2L-a) - m_1\right] \frac{q_1e^{-\lambda_{ST}x}}{\lambda_{ST}} - m_1q_1(L_r - x) \quad (7.9)$$

$$\sigma_{ST}(x) = e^{-\beta x} [C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x] - n_1 \frac{d\tau_{ST}(x)}{dx} + n_2q_1 \quad (7.10)$$

FIGURE 7.18 – Contrainte de pelage au milieu de l'adhésif en fonction de  $x$  pour  $\delta = 0.8$ .

Avec

$$\left\{ \begin{array}{l}
 y_1 = \frac{t_1}{2} \quad , \quad y_3 = \frac{t_3}{2} \\
 \lambda_{ST} = \sqrt{k_s b \frac{(y_1 + y_3)(y_1 + y_3 + t_2)}{\tilde{D}_1 + \tilde{D}_3} + \frac{1}{\tilde{A}_1} + \frac{1}{\tilde{A}_3}} \\
 m_1 = k_s \frac{1}{\lambda_{ST}} \frac{y_1 + y_3}{\tilde{D}_1 + \tilde{D}_3} \quad , \quad m_2 = k_s \frac{y_1}{\tilde{D}_1} \\
 \beta = \sqrt[4]{\frac{k_p b}{4} \left( \frac{1}{\tilde{D}_1} + \frac{1}{\tilde{D}_3} \right)} \\
 n_1 = \frac{y_1 \tilde{D}_3 - y_3 \tilde{D}_1}{\tilde{D}_1 + \tilde{D}_3} \quad , \quad n_2 = \frac{\tilde{D}_3}{b(\tilde{D}_1 + \tilde{D}_3)} \\
 n_3 = b k_s \left( \frac{y_1}{\tilde{D}_1} - \frac{y_3}{\tilde{D}_3} \right) \\
 M_0(0) = -q_1 \frac{a}{2} (2L - a) \quad , \quad T_0(0) = 0 \\
 C_1 = \frac{k_p}{2\beta^3 \tilde{D}_1} [T_0(0) + \beta M_0(0)] - \frac{n_3}{2\beta^3} \tau_{ST}(0) \\
 \quad + \frac{n_1}{2\beta^3} \left( \frac{d^4 \tau_{ST}(x)}{dx^4} \right) \Big|_{x=0} + \beta \frac{d^3 \tau_{ST}(x)}{dx^3} \Big|_{x=0} \\
 C_2 = -\frac{k_p}{2\beta^2 \tilde{D}_1} M_0(0) - \frac{n_1}{2\beta_2} \frac{d^3 \tau_{ST}(x)}{dx^3} \Big|_{x=0}
 \end{array} \right. \quad (7.11)$$

Les figures 7.19, 7.22, 7.20, 7.21 présentent une comparaison des résultats obtenus par la solution analytique développée dans le cadre de cette thèse, les résultats obtenus par le

modèle numérique ainsi que ceux donnés par la formule de Smith & Teng lorsque cela est possible ( $q_3 = 0$ ). Les résultats de Smith & Teng sont ici présentés comme référence dans le cas où les effets du second ordre et les effets de couplage sont négligés (tenseurs contrainte de Cauchy et de Piola-Kirchhoff confondus). Ils permettent de souligner l'apport des effets non linéaires géométriques et du couplage entre les contraintes de cisaillement et de pelage. Ces figures mettent en évidence la concordance des résultats numériques avec la solution analytique développée dans ce document.

La figure 7.19 représente l'évolution de la contrainte de cisaillement calculée au milieu de l'adhésif le long de la zone de recouvrement pour différentes valeurs de  $\delta$ . En zone d'extrémité, un pic de contrainte apparaît. Le renfort rentre progressivement en tension. Ce transfert d'effort génère un pic de cisaillement en extrémité du recouvrement de l'assemblage au sein de l'adhésif. La figure 7.20 s'attache à comparer cette valeur de pic en fonction de  $\delta$  pour  $q_3 = 0$ . Ce pic est correctement décrit par le modèle analytique. De plus, le modèle apporte une amélioration par rapport au modèle de Smith & Teng pouvant atteindre 16% suivant les configurations étudiées.

La figure 7.22 représente l'évolution de la contrainte de pelage calculée au milieu de l'adhésif le long de la zone de recouvrement pour différentes valeurs de  $\delta$ . Comme pour la contrainte de cisaillement, un pic de contrainte apparaît dû à un effort de flexion localisé en extrémité. Cela crée une force transverse à l'origine du pelage. Suivant la concavité de la flèche, cette force transverse est de traction ou de compression. La figure 7.21 compare cette valeur maximale de pelage en fonction de  $\delta$  pour  $q_3 = 0$ . Cette valeur est correctement calculée par le modèle analytique. De plus, le modèle apporte une amélioration par rapport au modèle de Smith & Teng pouvant atteindre 50% dans le cas d'un renfort intégral (faible niveau de contrainte). Dans le cas d'un renfort partiel, le modèle analytique apporte une amélioration de 10% par rapport au modèle de Smith & Teng.

La bonne évaluation du pic de contrainte permet de dimensionner le joint de colle. Le couplage complexe des contraintes de cisaillement et de pelage nécessite d'utiliser des critères de rupture. Pour exemple, la figure 7.23 présente la contrainte équivalente définie par Gali & Ishaï spécifiquement pour les adhésifs [44] (Cf. équation 2.32). Cette figure montre une bonne concordance entre les valeurs données par les modèles numériques et analytiques. En revanche, le modèle de Smith & Teng sous-estime la contrainte équivalente d'environ 16% lorsque la longueur de recouvrement devient faible par rapport à la longueur des substrats (ce qui est en général le cas pour le renforcement de structure).

### 7.2.5 Cas d'une poutre renforcée sous chargement thermique

Le modèle est présenté figure 7.9. Un chargement thermique est appliqué à la structure. Il reproduit le chargement généré lors de l'assemblage. Dans le cas d'un thermdurcisseur, pour faire polymériser l'adhésif, l'assemblage doit être chauffé. Une température classique pour un thermdurcisseur est de 120 °C. Cette température représente la température initiale (pour laquelle les déformations thermiques sont supposées nulles). A température ambiante (20 °C), le chargement thermique appliqué à la structure est donc  $\Delta T = -100$  °C. C'est la valeur de chargement retenue pour l'application numérique.

Les figures 7.24, 7.25, 7.26, 7.27 comparent les résultats de la solution analytique développée dans le cadre de cette thèse aux résultats obtenus par le modèle numérique. L'allure générale de la répartition des contraintes est concordante avec les résultats numériques. Les figures 7.26 et 7.27 mettent en évidence une concordance correcte concernant les pics

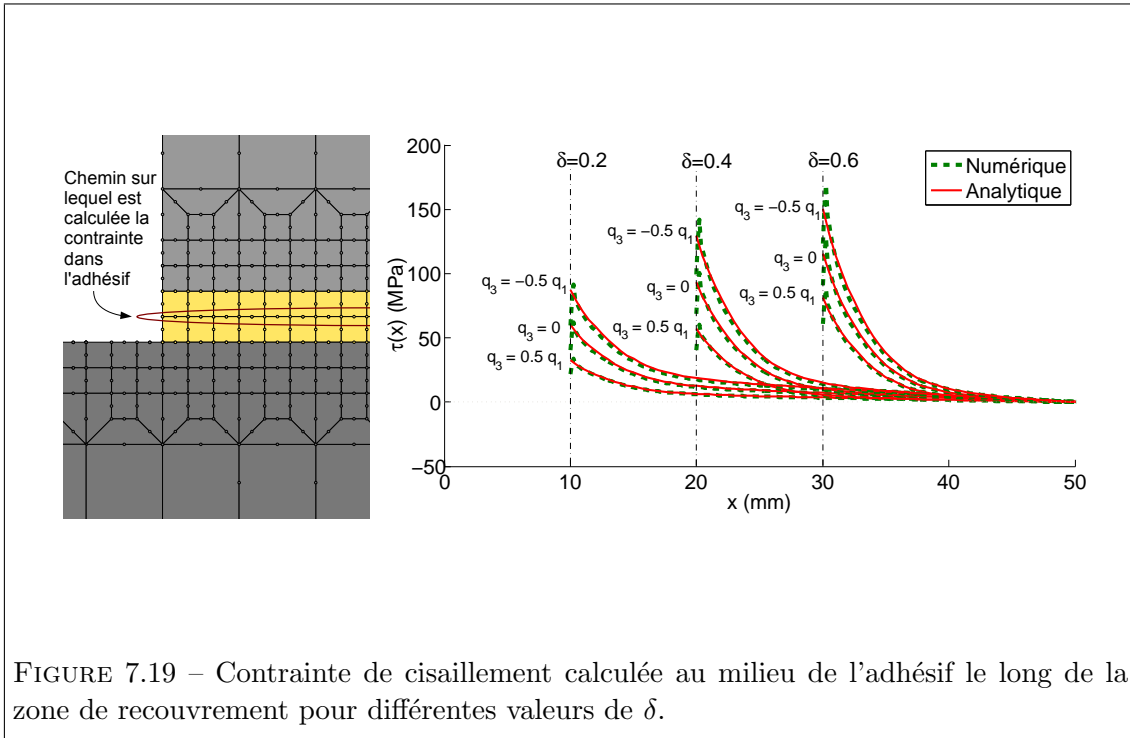


FIGURE 7.19 – Contrainte de cisaillement calculée au milieu de l'adhésif le long de la zone de recouvrement pour différentes valeurs de  $\delta$ .

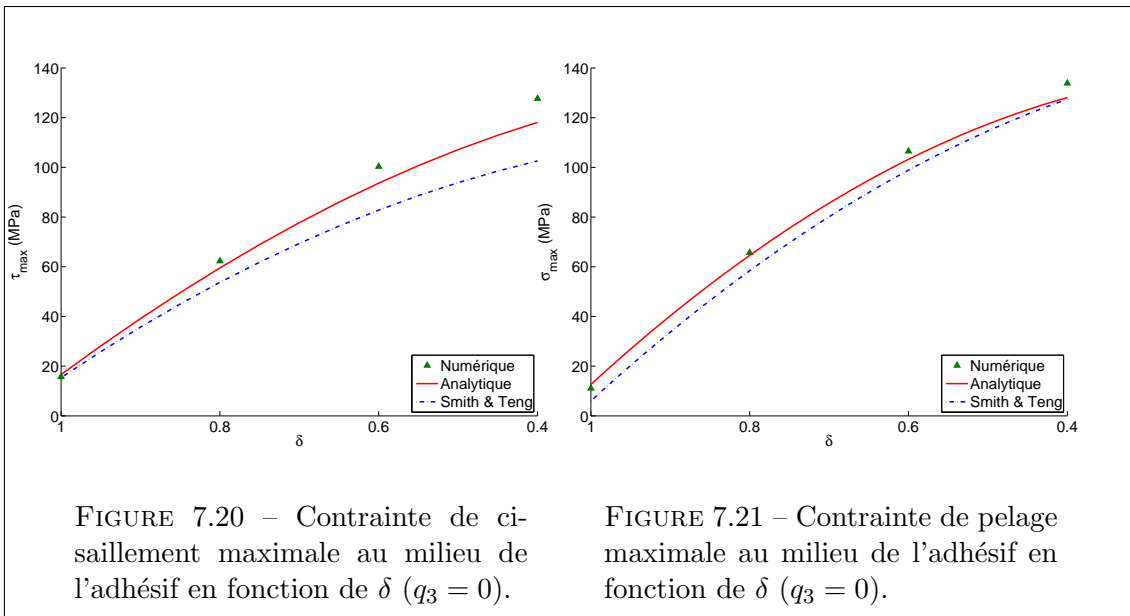


FIGURE 7.20 – Contrainte de cisaillement maximale au milieu de l'adhésif en fonction de  $\delta$  ( $q_3 = 0$ ).

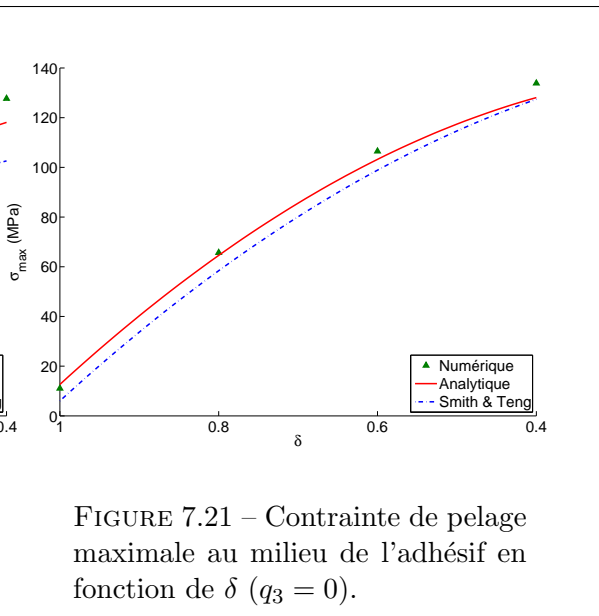


FIGURE 7.21 – Contrainte de pelage maximale au milieu de l'adhésif en fonction de  $\delta$  ( $q_3 = 0$ ).

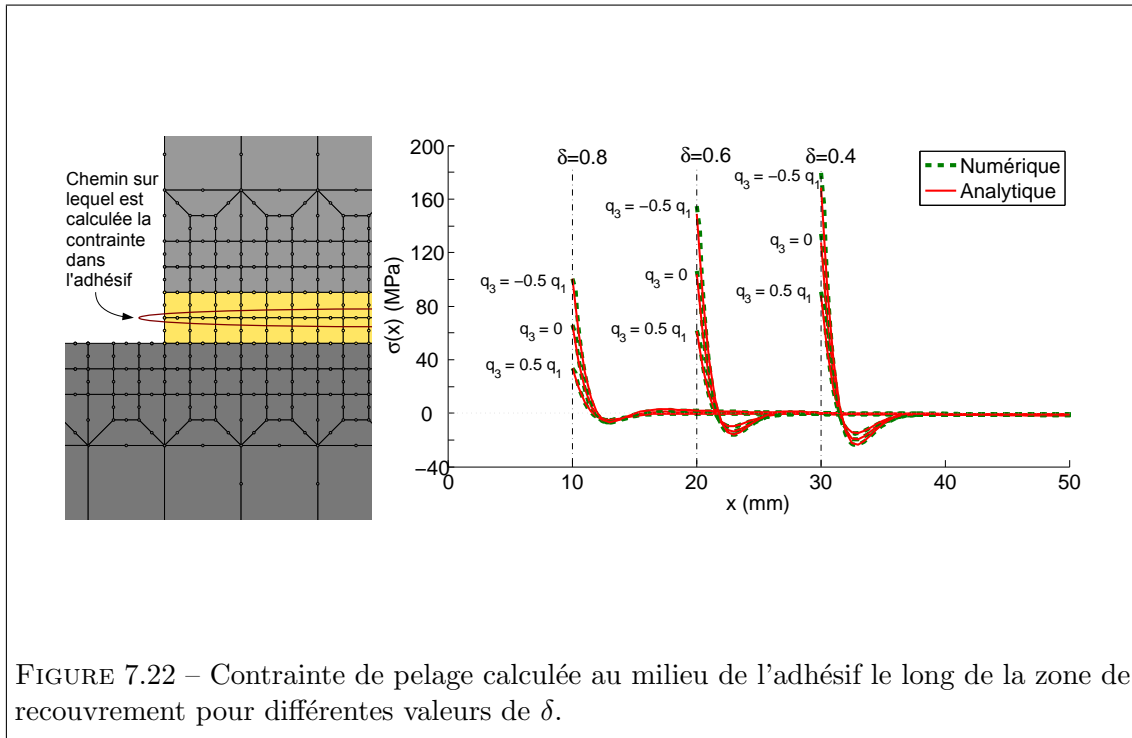


FIGURE 7.22 – Contrainte de pelage calculée au milieu de l'adhésif le long de la zone de recouvrement pour différentes valeurs de  $\delta$ .

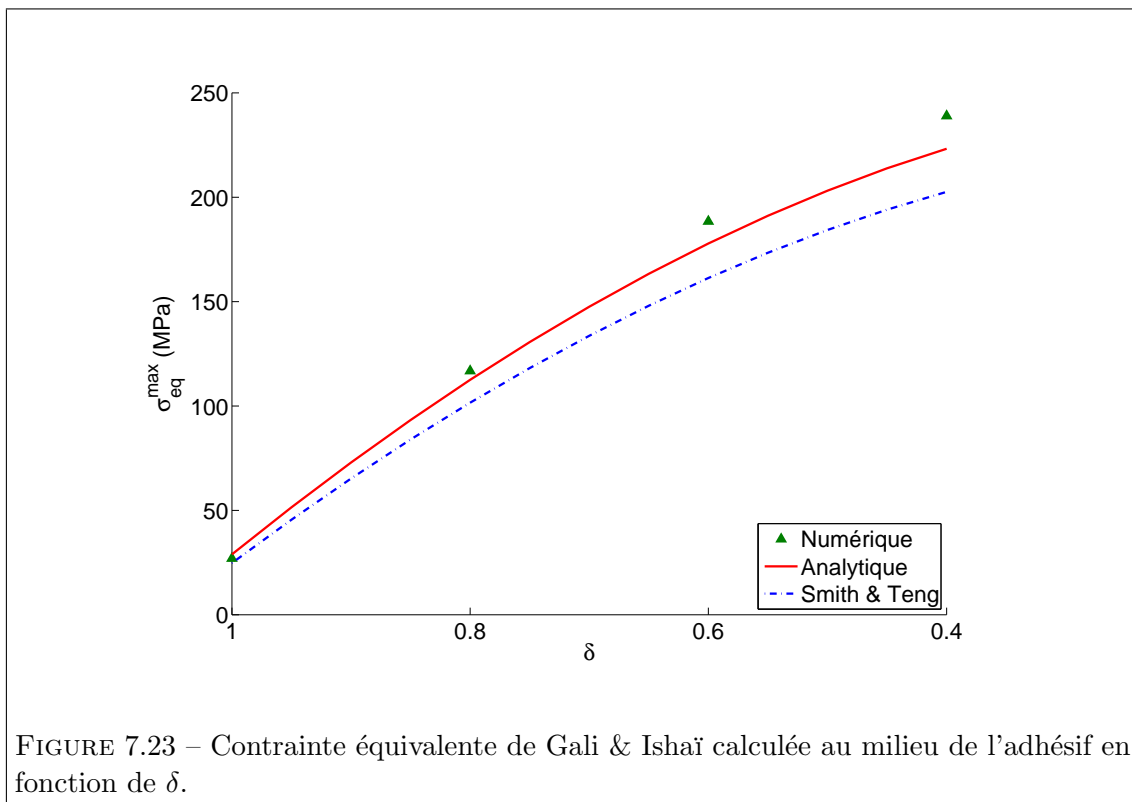


FIGURE 7.23 – Contrainte équivalente de Gali & Ishaï calculée au milieu de l'adhésif en fonction de  $\delta$ .

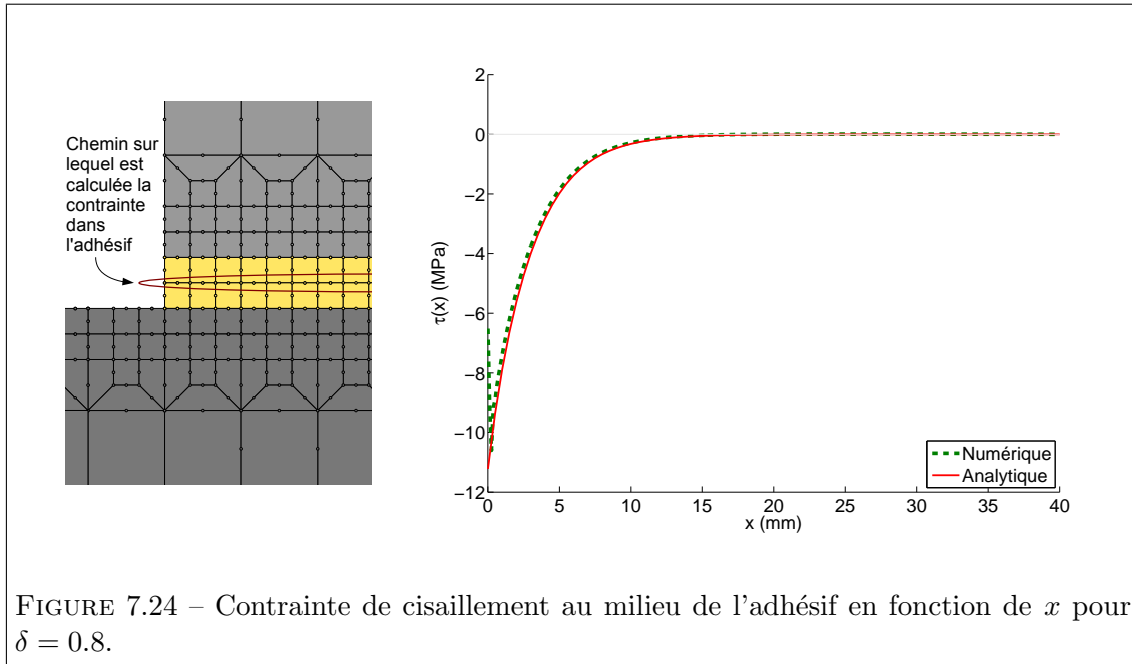


FIGURE 7.24 – Contrainte de cisaillement au milieu de l'adhésif en fonction de  $x$  pour  $\delta = 0.8$ .

de contrainte de cisaillement. En revanche, il existe un écart de 18% entre les valeurs de pic de contrainte de pelage calculées analytiquement et numériquement. L'ordre de grandeur des contraintes en jeu est inférieur à 5 MPa, les différences absolues ne dépassent pas 1 MPa.

### 7.2.6 Cas d'une poutre renforcée comprimée

Le modèle est présenté figure 7.12. Pour l'application numérique, la charge de compression  $N$  est égale à 300 N (90% de la charge critique lorsque  $\delta = 0.4$ ). La charge critique du substrat 1 seul est de 175 N. Les figures 7.28, 7.31, 7.29, 7.30 comparent les résultats obtenus par la solution analytique développée dans le cadre de cette thèse à ceux obtenus par le modèle numérique. Ces figures mettent en évidence la concordance des résultats numériques avec les résultats analytiques de la solution développée dans la partie précédente.

La figure 7.28 représente l'évolution de la contrainte de cisaillement calculée au milieu de l'adhésif le long de la zone de recouvrement pour différentes valeurs de  $\delta$ . En zone d'extrémité, un pic de contrainte apparaît. Ce transfert d'effort génère un pic de cisaillement en extrémité du recouvrement de l'assemblage au sein de l'adhésif. La figure 7.29 s'attache à comparer cette valeur de pic en fonction de  $\delta$ . Ce pic est convenablement décrit par le modèle analytique.

La figure 7.31 représente l'évolution de la contrainte de pelage calculée au milieu de l'adhésif le long de la zone de recouvrement pour différentes valeurs de  $\delta$ . Comme pour la contrainte de cisaillement, en zone d'extrémité, un pic de contrainte apparaît. Le renfort n'accompagne pas totalement le substrat en extrémité. Cela crée une force transverse à l'origine du pelage. Suivant la concavité de la flèche, cette force transverse est de traction ou de compression. La figure 7.30 représente cette valeur maximale de pelage en fonction de  $\delta$ . Cette valeur est correctement calculée par le modèle analytique.

La bonne description de la répartition des contraintes au sein du joint d'adhésif, re-

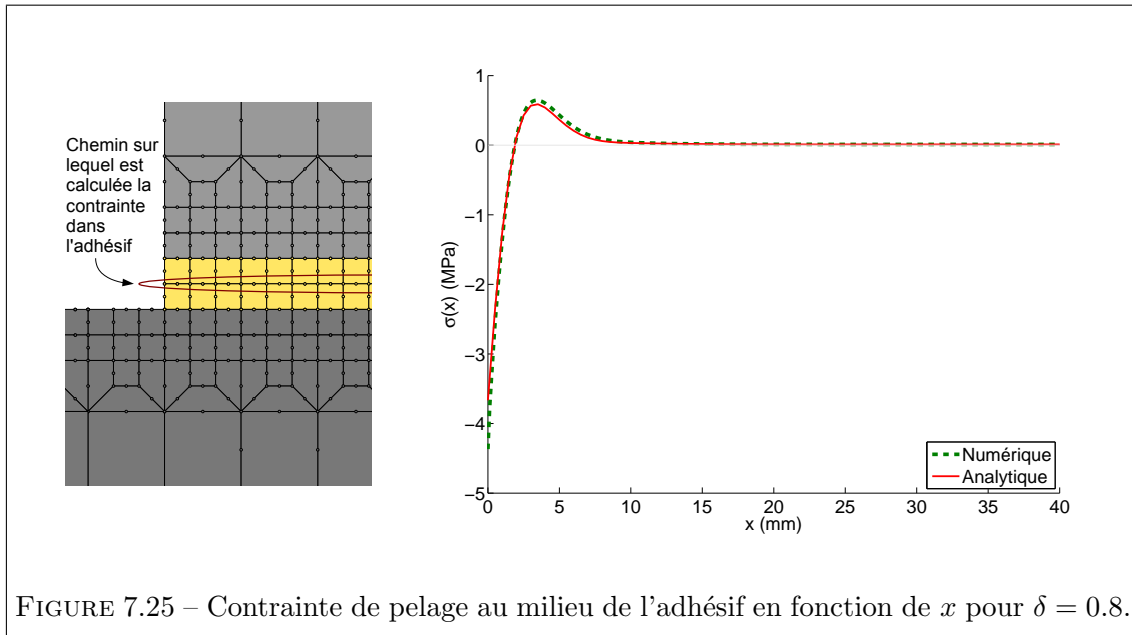


FIGURE 7.25 – Contrainte de pelage au milieu de l'adhésif en fonction de  $x$  pour  $\delta = 0.8$ .

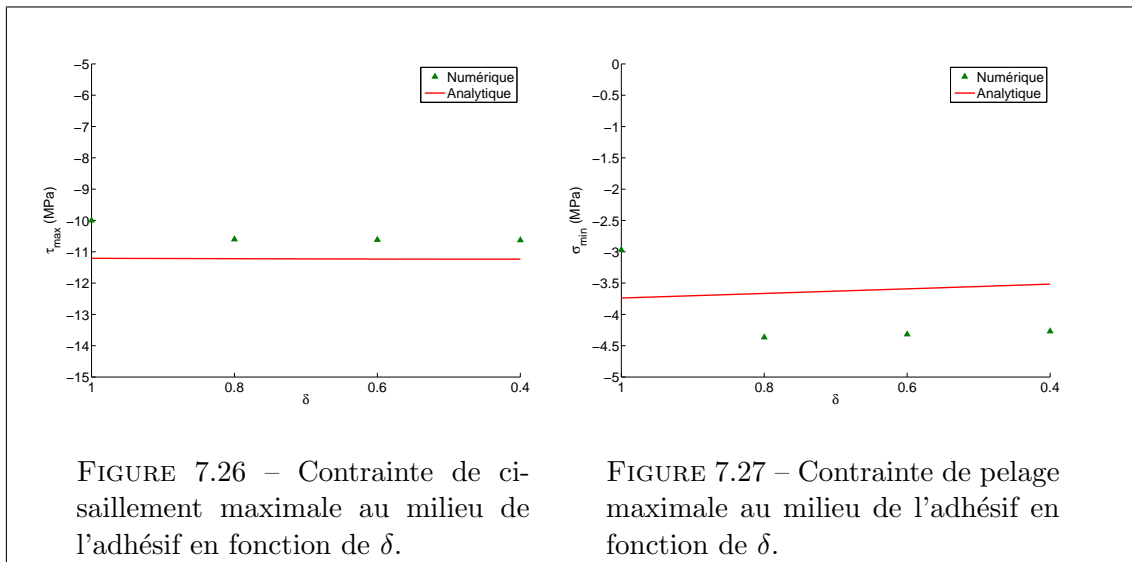


FIGURE 7.26 – Contrainte de cisaillement maximale au milieu de l'adhésif en fonction de  $\delta$ .

FIGURE 7.27 – Contrainte de pelage maximale au milieu de l'adhésif en fonction de  $\delta$ .

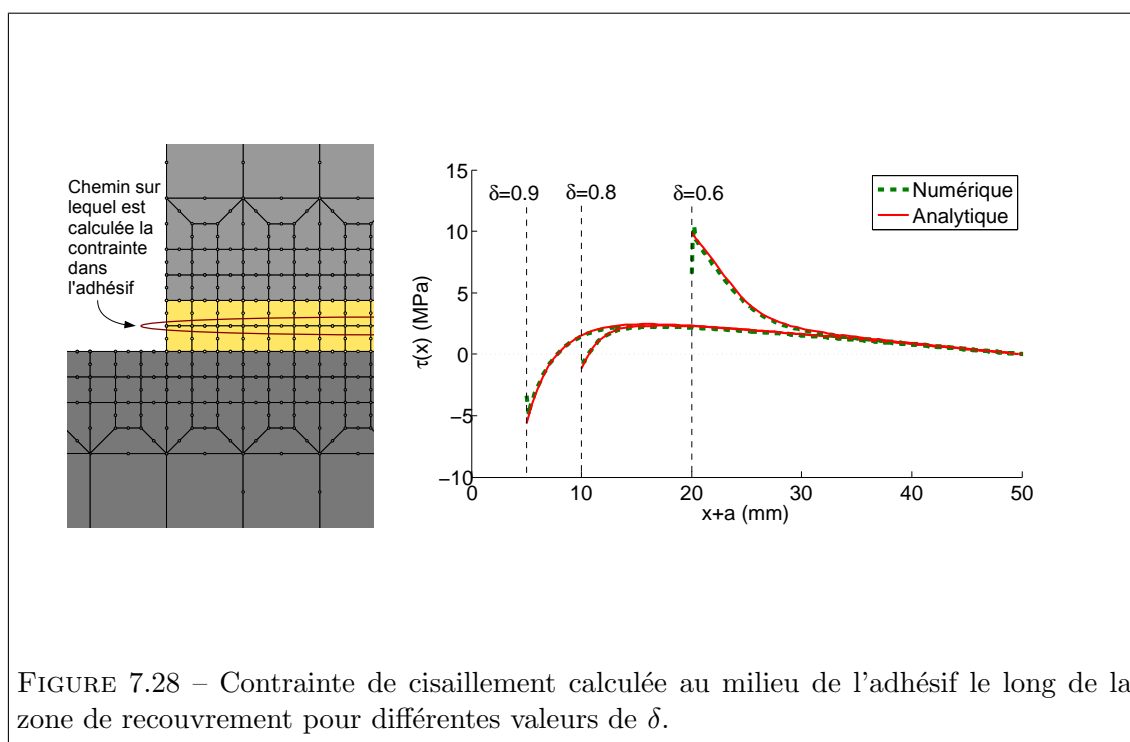


FIGURE 7.28 – Contrainte de cisaillement calculée au milieu de l’adhésif le long de la zone de recouvrement pour différentes valeurs de  $\delta$ .

pose sur la capacité à pouvoir définir le comportement de la structure globale. Dans la configuration où la structure flambe, les effets du second ordre ne sont plus négligeables : la longueur de transfert des efforts  $l_0$  conditionne fortement les résultats.

## 7.3 Conclusion

Le modèle analytique développé dans le cadre de cette thèse a été adapté à diverses configurations classiques et divers chargements mécaniques et thermiques. Cette partie a permis de mettre en avant une très bonne concordance entre les résultats obtenus à partir du modèle analytique et ceux obtenus à partir de simulations numériques. Le modèle d’interaction proposé améliore la précision des modèles existants dans la littérature pouvant atteindre 30% sur la contrainte de cisaillement et 80% sur la contrainte de pelage suivant les configurations étudiées. La partie suivante s’intéresse à valider les hypothèses qui sont à l’origine de ce modèle analytique en comparant les résultats calculés par notre modèle à des résultats expérimentaux.



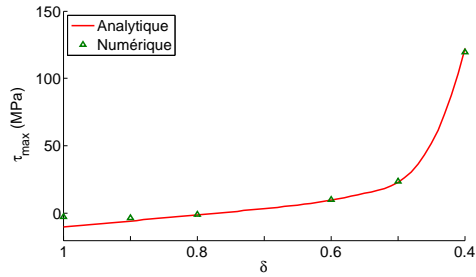


FIGURE 7.29 – Contrainte de cisaillement maximal au milieu de l'adhésif en fonction de  $\delta$ .

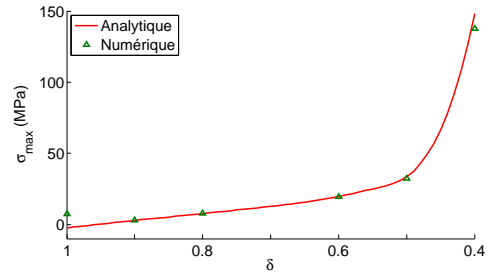


FIGURE 7.30 – Contrainte de pelage maximale au milieu de l'adhésif en fonction de  $\delta$ .

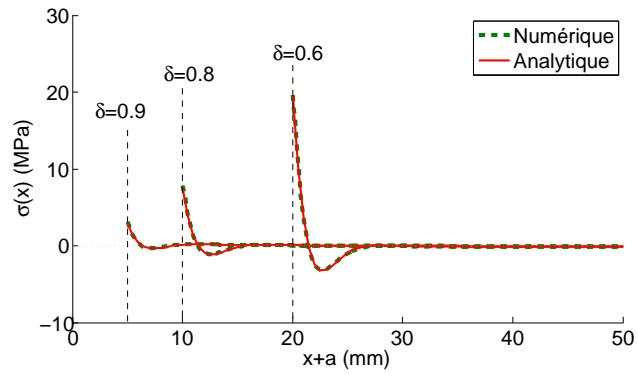
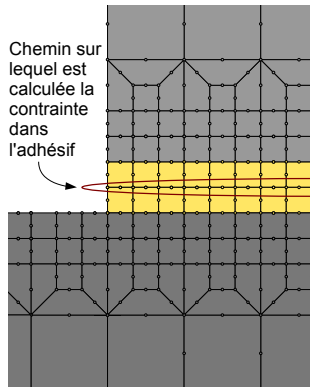


FIGURE 7.31 – Contrainte de pelage calculée au milieu de l'adhésif le long de la zone de recouvrement pour différentes valeurs de  $\delta$ .

## Chapitre 8

# Validation par comparaison avec des expérimentations

---

<b>8.1</b>	<b>Les éprouvettes . . . . .</b>	<b>120</b>
8.1.1	Description des éprouvettes et des moyens de mesure . . . . .	120
8.1.2	Réalisation des éprouvettes . . . . .	120
8.1.3	Méthode de comparaison utilisée . . . . .	121
<b>8.2</b>	<b>Essais en flexion trois points . . . . .</b>	<b>122</b>
<b>8.3</b>	<b>Essais en flambage par compression . . . . .</b>	<b>125</b>
8.3.1	Comportement global . . . . .	125
8.3.2	Déformations en extrémité du renfort . . . . .	128
<b>8.4</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>128</b>

---

## 8.1 Les éprouvettes

### 8.1.1 Description des éprouvettes et des moyens de mesure

Dans les parties précédentes, le comportement réel de l'assemblage collé a été approximé : hypothèses cinématiques, matériaux. Ce travail a conduit à un modèle analytique d'interaction qui a été validé par comparaison à des simulations numériques basées sur des hypothèses similaires. L'objectif de cette partie est de comparer les résultats du modèle analytique à des résultats expérimentaux afin d'étudier la pertinence de ces hypothèses. L'apport de ce travail de thèse portant notamment sur la prise en compte des effets de courbure dans le calcul des contraintes au sein de l'adhésif, les éprouvettes testées sont soumises à de la flexion ou du flambage. La forme d'éprouvette retenue pour valider expérimentalement le modèle analytique est présentée figure 8.1. Les éprouvettes ont été réalisées intégralement au sein du laboratoire dans le but de mieux appréhender les difficultés intrinsèques à la méthode d'assemblage par collage. Les adhérents sont en aluminium. L'adhésif retenu pour réaliser l'assemblage est la Redux<sup>®</sup> 312 L fabriquée par Hexcel (les propriétés mécaniques sont détaillées dans la partie 1.7.2).

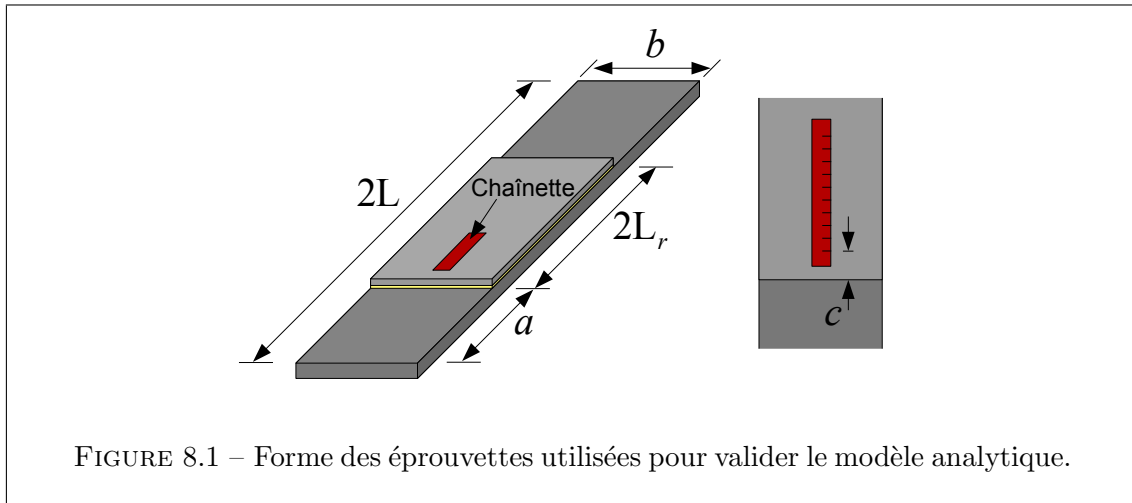


FIGURE 8.1 – Forme des éprouvettes utilisées pour valider le modèle analytique.

Les déplacements hors plan, induits par les sollicitations excluent l'utilisation de méthodes du type mesure de champs. Ainsi, la solution retenue consiste à utiliser des jauges d'extensométrie pour mesurer les déformations. Gacoin utilise dans sa thèse des chaînettes de jauges pour mesurer les pics de contraintes en extrémité d'un substrat au sein d'un assemblage collé [43]. Nous nous proposons d'utiliser une méthode similaire en mesurant les déformations au dessus du renfort en extrémité de la zone de recouvrement. La chaînette utilisée est présentée en annexe D. Lors de la réalisation des essais, la force appliquée et la flèche de l'éprouvette sont mesurées. Les schémas expérimentaux sont présentés dans partie détaillant les résultats.

### 8.1.2 Réalisation des éprouvettes

La phase de réalisation des éprouvettes a permis de mettre en avant quelques problèmes liés à la technique du collage.

- Lors de la polymérisation sous presse, en l'absence de cales, l'adhésif peut être chassé partiellement de la zone de recouvrement. L'épaisseur devient nulle par endroit. Ce phénomène est accentué lors de l'assemblage de deux matériaux ayant des coefficients de dilatation thermique très différents. La courbure des adhérents au centre pousse l'adhésif sur les bords.
- Dans les hypothèses du modèle analytique, l'adhésif a une épaisseur constante. Pour palier au problème précédent, des cales ont été installées pour contrôler l'épaisseur d'adhésif le long de la zone de recouvrement. Malgré cette précaution, des variations dans l'épaisseur du joint pouvant aller jusqu'à 30% sont observées sur certaines éprouvettes (Cf. tableau 8.3).
- L'adhésif utilisé polymérise à 120°C. Bien que mises en oeuvre sous presse, des tentatives de réalisation d'assemblages bi-matériaux (acier/aluminium) ont conduit à des éprouvettes courbées : la dilatation thermique différentielle induit une courbure initiale des éprouvettes (principe du bi-lame - Cf. 5.3.2). Ces éprouvettes n'ont pas été utilisées.

Finalement, deux éprouvettes sont arrivées à la fin du processus de réalisation et d'équipement en moyens de mesure. Le tableau 8.1 rapporte les dimensions mesurées de ces éprouvettes. Les modules d'Young ont été déterminés à partir d'essais en traction. La valeur retenue correspond à la valeur moyenne obtenue à partir de 10 essais. Cette valeur est ensuite approximée pour ne garder que deux chiffres significatifs. Les valeurs de coefficient de Poisson correspondent à la valeur moyenne pour les aluminiums. Les résultats sont indiqués dans le tableau 8.2. Le tableau 8.3 rapporte les valeurs de l'épaisseur de joint d'adhésif mesurée le long de la zone de recouvrement. Dans le cas de l'éprouvette n°1, dans la zone de la chaînette, l'épaisseur de l'adhésif est constante. La valeur utilisée dans le modèle analytique est 0.24 mm. Pour l'éprouvette n°2, l'épaisseur utilisée est 0.2 mm.

	$2L$ (mm)	$2L_r$ (mm)	$a$ (mm)	$b$ (mm)	$c$ (mm)	$\delta = L_r/L$
Eprouvette n°1	300	121	88	30	3	0.403
Eprouvette n°2	300	180	59	30	2.5	0.600

TABLE 8.1 – Dimensions mesurées sur les éprouvettes utilisées.

	$E$ (GPa)	$\nu$
Adhérent n°1	71	0.32
Adhérent n°3	67	0.32
Adhésif	3	0.3

TABLE 8.2 – Propriétés matériaux des différents constituants des éprouvettes.

### 8.1.3 Méthode de comparaison utilisée

Il n'est pas possible de récupérer expérimentalement les contraintes au sein de l'adhésif. Les résultats expérimentaux exploitables sont les déformations longitudinales sur la face externe du renfort, spécialement les déformations à l'extrémité. A partir du modèle

Eprouvette n°1

Distance à l'extrémité (mm)	10	20	40	60	80	100	110
Epaisseur de l'adhésif (mm)	0.24	0.24	0.24	0.21	0.17	0.17	0.19

Eprouvette n°2

Distance à l'extrémité (mm)	10	20	50	90	130	160	170
Epaisseur de l'adhésif (mm)	0.2	0.19	0.16	0.14	0.16	0.18	0.19

TABLE 8.3 – Epaisseur de l'adhésif le long de zone de recouvrement.

analytique, il est possible de calculer ces déformations à partir de l'équation 4.11 :

$$\varepsilon_x(x, d_4) = \frac{N_3(x)}{\tilde{A}_3} + \frac{t_3}{2} \frac{M_3(x)}{\tilde{D}_3} \quad (8.1)$$

et

$$\varepsilon_x(x, d_1) = \frac{N_1(x)}{\tilde{A}_1} - \frac{t_1}{2} \frac{M_1(x)}{\tilde{D}_1} \quad (8.2)$$

Les  $d_i$  sont définis sur la figure 4.1. Les résultantes  $N_1(x)$ ,  $N_3(x)$  sont calculées à partir de l'équilibre local défini par les équations 4.25, et 4.28. Ainsi, il vient :

$$N_3(x) = b \int_0^x \tau(x) dx \quad (8.3)$$

$$N_1(x) = -b \int_0^x \tau(x) dx \quad (8.4)$$

La contrainte de cisaillement  $\tau(x)$  étant elle-même donnée par l'équation 4.52 et les constantes d'intégration définies dans les parties 5.2 et 5.3.3. Dans le cas de la flexion trois points, les conditions aux limites sont  $N_1(0) = N_3(0) = 0$  ; dans le cas du flambage,  $N_1(0) = -N$  et  $N_3(0) = 0$ . Les résultantes  $M_1$ ,  $M_3$  sont calculées à partir des équations 4.21,

$$M_3(x) = \frac{\tilde{D}_3}{\tilde{D}_1} M_1(x) - \frac{\tilde{D}_3}{k_p} \frac{d^2 \sigma(x)}{dx^2} \quad (8.5)$$

$$M_1(x) = \frac{2\tilde{D}_1}{t_1 + t_2 + t_3} \left( \frac{N_3(x)}{\tilde{A}_3} - \frac{N_1(x)}{\tilde{A}_1} - \frac{1}{k_s} \frac{d\tau(x)}{dx} + \frac{t_3 + t_2}{2k_p} \frac{d^2 \sigma(x)}{dx^2} \right) \quad (8.6)$$

## 8.2 Essais en flexion trois points

Dans le cas de la flexion, les effets du second ordre sont négligeables. La linéarité entre divers niveaux de chargement a été vérifiée. Il suffit donc d'étudier le comportement pour un cas de chargement. Seul le cas de charge  $P = 45$  N est présenté (limite du capteur de force utilisé). Une simple règle de trois avec les résultats présentés dans cette partie permettrait d'obtenir le comportement pour un autre cas de chargement.

Le schéma expérimental est présenté sur la figure 8.2. La longueur entre les deux appuis est de 286 mm. Ainsi, dans le modèle analytique,  $L$  vaut 143 mm. Les taux de recouvrement se trouvent légèrement modifiés : pour l'éprouvette n°1,  $\delta = 0.423$  et pour l'éprouvette n°2,  $\delta = 0.629$ . Un capteur de déplacement est placé au milieu, sous le point d'application

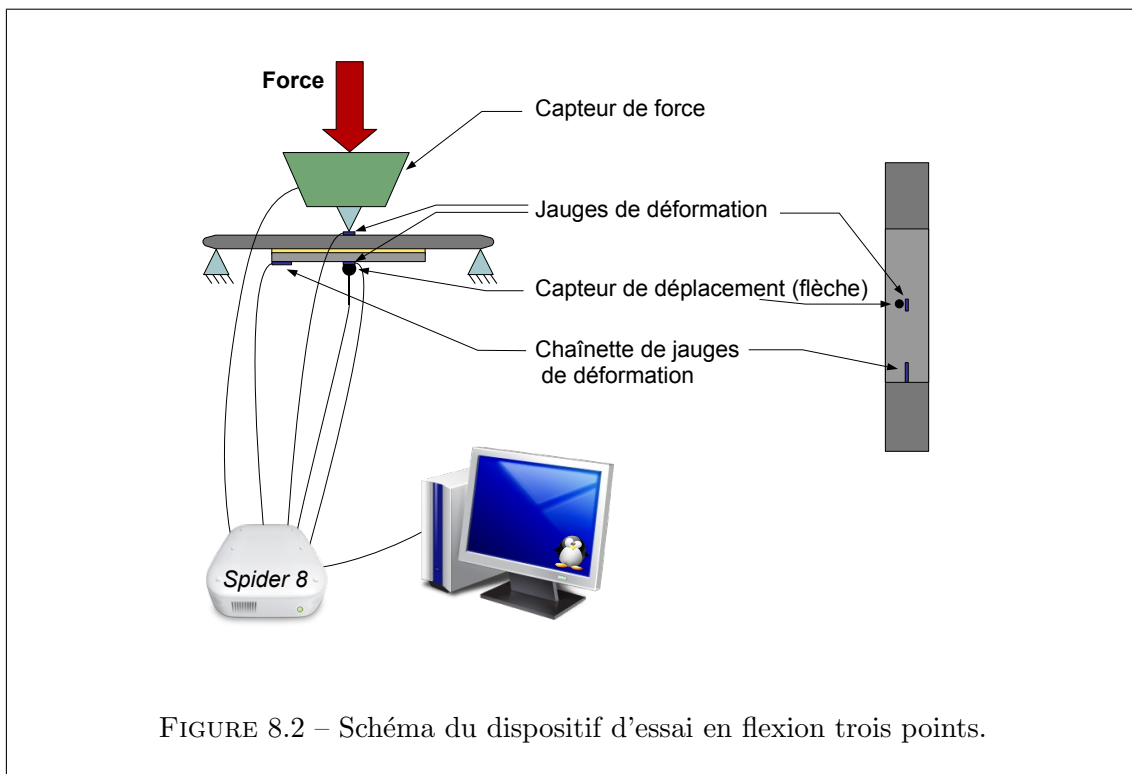


FIGURE 8.2 – Schéma du dispositif d'essai en flexion trois points.

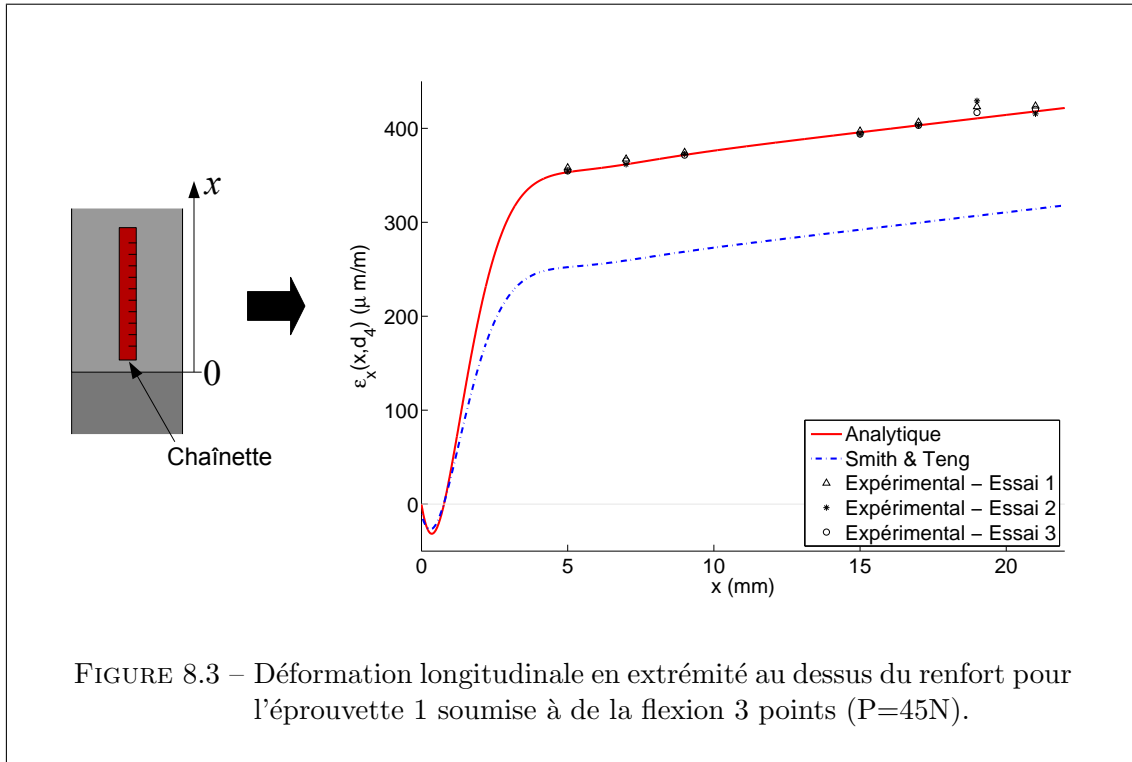
de la force : il permet de mesurer la flèche de la poutre. En extrémité, une chaîne de jauges permet de récupérer la déformation longitudinale en 10 points de mesure sur une distance de 24 mm. Au centre, sont collées deux jauges de déformation qui permettent de mesurer les déformations longitudinales au milieu de l'assemblage ( $x = L_r$ ) sur les faces extérieures du substrat et du renfort. Le montage comprend 14 voies de mesure. Elles sont synchronisées via des boîtiers *Spider* de HBM. Le boîtier maître est relié à un ordinateur sur lequel le logiciel *Catman* permet de traiter les mesures.

Les flèches expérimentales et analytiques sont rapportées dans le tableau 8.4. Une bonne concordance est trouvée entre les résultats expérimentaux et analytiques.

	Flèche expérimentale moyenne	Flèche analytique	Erreur relative
Eprouvette n°1	2.15 mm	2.3 mm	7%
Eprouvette n°3	1.75 mm	1.9 mm	8.5%

TABLE 8.4 – Flèches expérimentales et analytiques dans le cas de la flexion trois points.

Les figures 8.3 et 8.4 rapportent les déformations longitudinales mesurées au dessus du renfort en extrémité. Trois des dix voies n'ont pas fonctionné, c'est pourquoi les résultats expérimentaux ne présentent pas 10 points de mesure. Toutefois, les résultats analytiques et expérimentaux sont concordants. Les propriétés de l'éprouvette ne permettent pas d'exploiter complètement le principe de la chaîne. En effet, la zone de transfert est inférieure à 5 mm. Ainsi, le phénomène d'ancrage est presque terminé à l'endroit où la première jauge mesure une déformation. Les résultats expérimentaux permettent d'analyser principalement le comportement en zone courante.



Pour comparaison, les résultats obtenus à partir des contraintes de cisaillement et de pelage calculées par Smith & Teng sont tracés sur les graphes (Cf. Figures 8.3 et 8.4). Ces auteurs font l'hypothèse que la contrainte de pelage n'accroît pas la contrainte de cisaillement (phénomène localisé à la zone d'ancrage) : seul l'effort tranchant de la structure équivalente homogène est pris en compte :

$$\frac{d^2\tau(x)}{dx^2} - \lambda_{ST}^2\tau(x) = m_1\lambda_{ST}^2T_0(x) \quad (8.7)$$

Les constantes  $\lambda_{ST}$  et  $m_1$  sont définies dans la partie 7.2.3. La contrainte de cisaillement se trouve découplée de la contrainte de pelage. En extrémité, cette hypothèse revient à supprimer des termes dans les équations de l'équilibre local. Ainsi, le pic de contrainte de cisaillement est sous-estimé. Lors de l'intégration de cette contrainte pour obtenir l'effort normal, l'amplitude de l'effort se trouve sous-estimée à son tour. En utilisant la condition  $N_3(0) = 0$  (Cf. équation 8.3), le comportement en zone courante ne se superpose pas avec le comportement en zone courante réelle. Ainsi, dans le modèle de Smith & Teng, la contrainte normale dans le renfort se trouve sous-estimée par rapport à la réalité d'environ 25%. Par ce biais, seul un modèle décrivant précisément la répartition de la contrainte de cisaillement en extrémité (ie. pic de contrainte exact) permet d'obtenir le comportement réel en zone courante.

Indirectement, les figures 8.3 et 8.4 permettent donc de valider les hypothèses de la solution analytique développée dans ce rapport. La solution analytique donne la bonne valeur de contrainte de cisaillement dans l'adhésif.

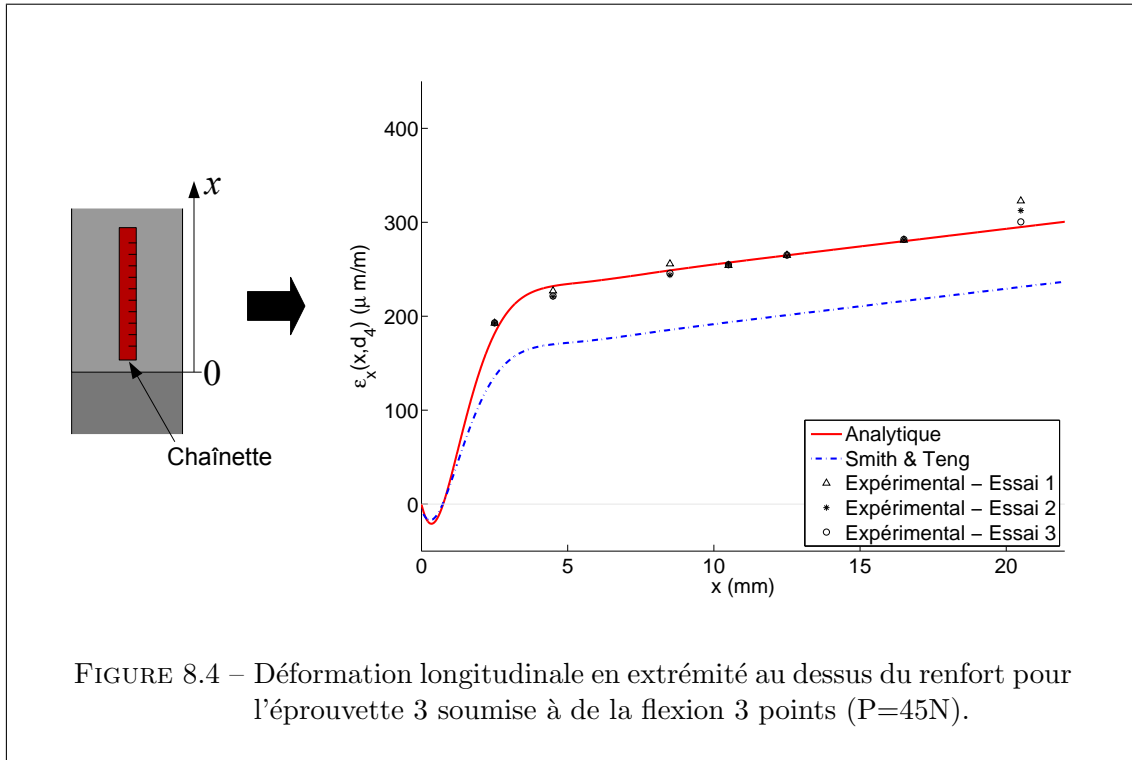


FIGURE 8.4 – Déformation longitudinale en extrémité au dessus du renfort pour l'éprouvette 3 soumise à de la flexion 3 points ( $P=45\text{N}$ ).

### 8.3 Essais en flambage par compression

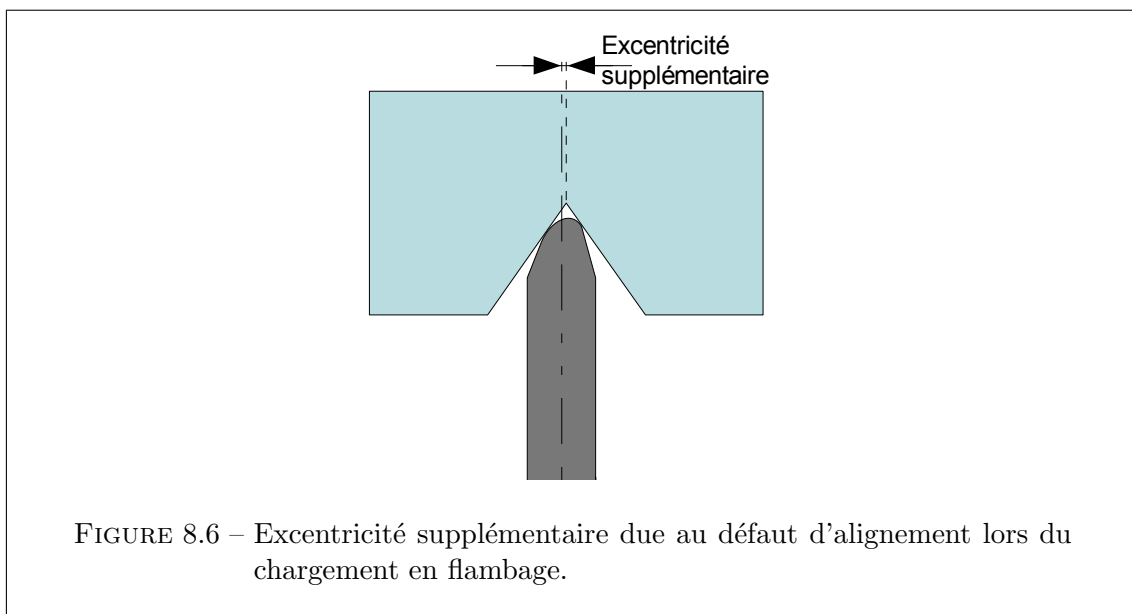
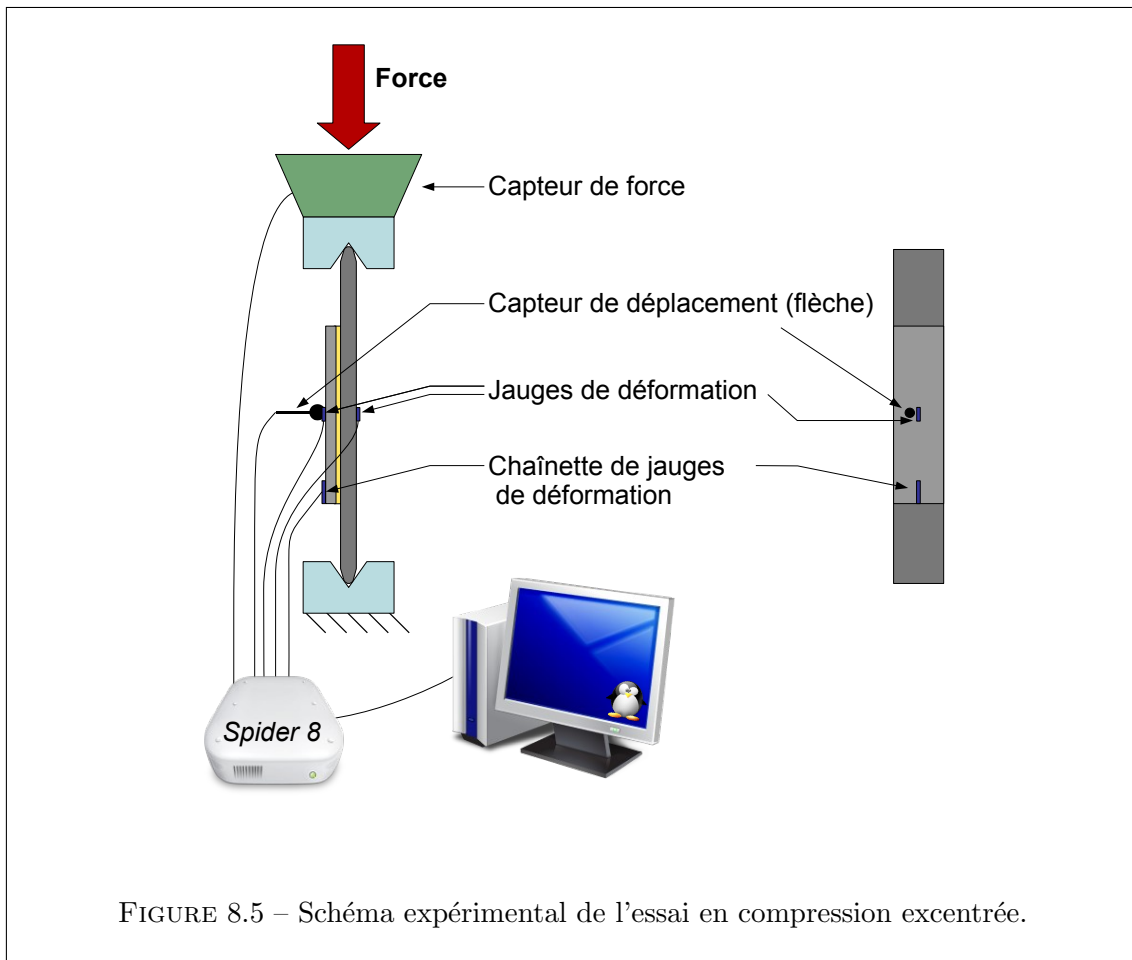
Le schéma expérimental est présenté sur la figure 8.5. L'éprouvette est maintenue entre deux mors en V, ce qui ramène au cas du flambage d'une poutre bi-articulée. Un capteur de déplacement est placé au milieu afin de mesurer la flèche de la poutre. En extrémité, une chaînette permet de récupérer la déformation longitudinale en 10 points de mesure sur une distance de 24 mm. Au centre, sont collées deux jauges de déformation qui permettent de récupérer les déformations longitudinales au milieu de l'assemblage ( $x = L_r$ ) sur les faces extérieures du substrat et du renfort. Le montage comprend 14 voies de mesure. Elles sont synchronisées via des boîtiers *Spider* de HBM. Le boîtier maître est relié à un ordinateur sur lequel le logiciel *Catman* permet de traiter les mesures.

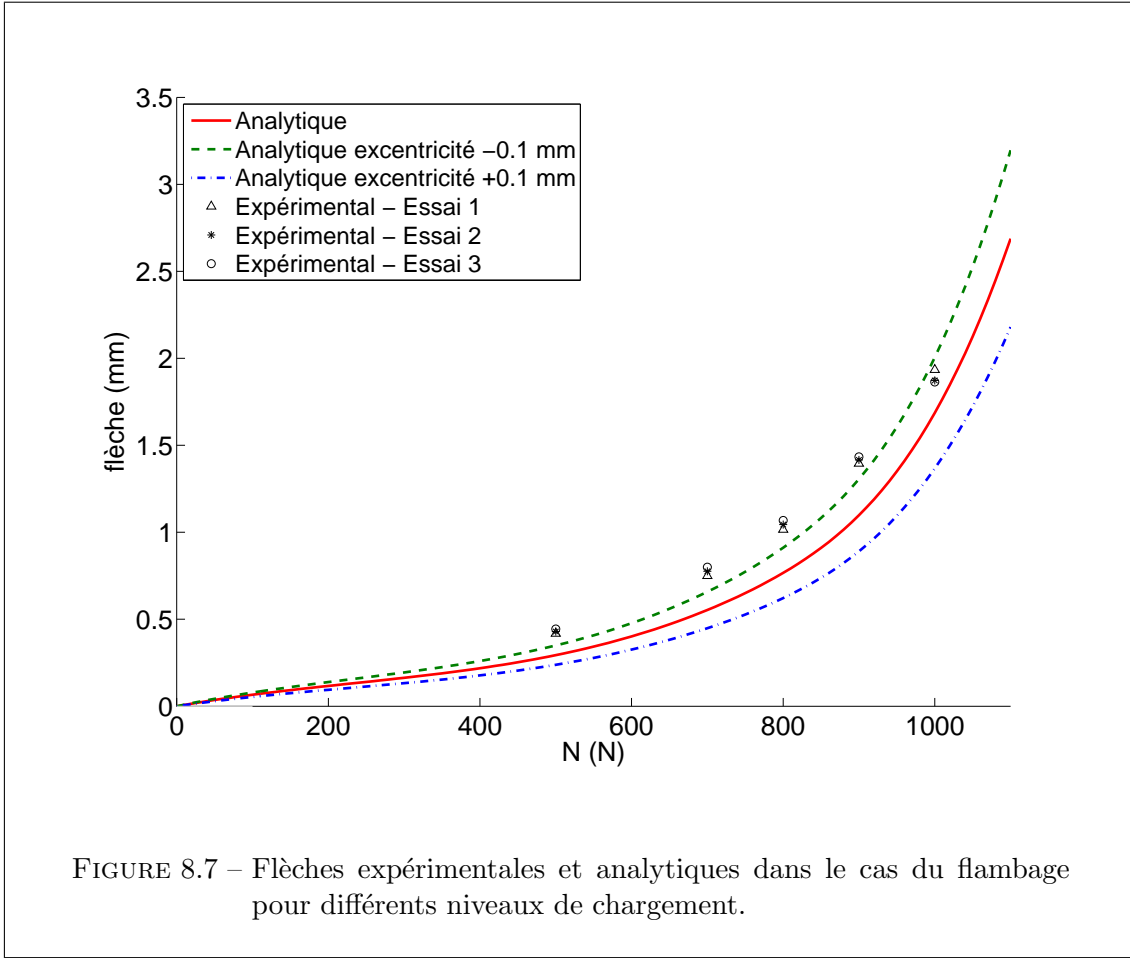
Dans le cas du flambage, la linéarité est perdue du fait des effets du 2<sup>nd</sup> ordre. Il n'est plus possible de passer d'un niveau de chargement à un autre par le biais d'une règle de trois. Plusieurs niveaux de chargement sont étudiés. Lors de la réalisation des tests, aucun autre défaut extérieur n'a été introduit pour forcer l'éprouvette à flamber dans le "bon" sens. Ainsi, l'éprouvette n°1 a flambé dans le mauvais sens : les résultats ne sont pas exploitables. Seuls les résultats de l'éprouvette n°2 sont présentés.

#### 8.3.1 Comportement global

La figure 8.7 compare les valeurs de flèche obtenues expérimentalement et analytiquement en fonction du niveau de chargement. La sensibilité vis-à-vis du positionnement de l'éprouvette dans les mors a été étudiée (Cf. figure 8.6) : un défaut d'alignement de 0.1 mm dans le positionnement apporte une modification de 30% sur la valeur de la flèche.







En revanche, cela ne modifie pas la valeur de la force critique (principe du flambage). Les courbes pointillées (en vert et bleu) représentent le comportement de l'éprouvette pour un défaut d'alignement dans les mors respectivement de  $+0.1$  mm et  $-0.1$  mm. La courbure et la déformation normale au centre de l'éprouvette ont été calculées pour analyser la différence entre les valeurs de flèches analytiques et expérimentales. Les valeurs sont obtenues de la manière suivante

$$\chi_0^{\text{exp}}(L_r) = \frac{\varepsilon_x(L_r, d_1) - \varepsilon_x(L_r, d_4)}{t_1 + t_2 + t_3} \quad (8.8)$$

et

$$\varepsilon_0^{\text{exp}}(L_r) = \frac{\varepsilon_x^{\text{exp}}(L_r, d_1) + \varepsilon_x^{\text{exp}}(L_r, d_4)}{2} - \chi_0^{\text{exp}}(L_r) \left( \frac{t_1 + t_2 + t_3}{2} - \frac{\sum_{i=1}^n z_i E_i \Omega_i}{\sum_{i=1}^n E_i \Omega_i} \right) \quad (8.9)$$

$\varepsilon_x^{\text{exp}}(L_r, d_1)$  correspond à la déformation en milieu d'éprouvette sur la face extérieure du substrat,  $\varepsilon_x^{\text{exp}}(L_r, d_4)$  est la déformation en milieu d'éprouvette sur la face extérieure du renfort (les  $d_i$  sont définis sur la figure 4.1). Les résultats sont présentés figures 8.8 et 8.9.

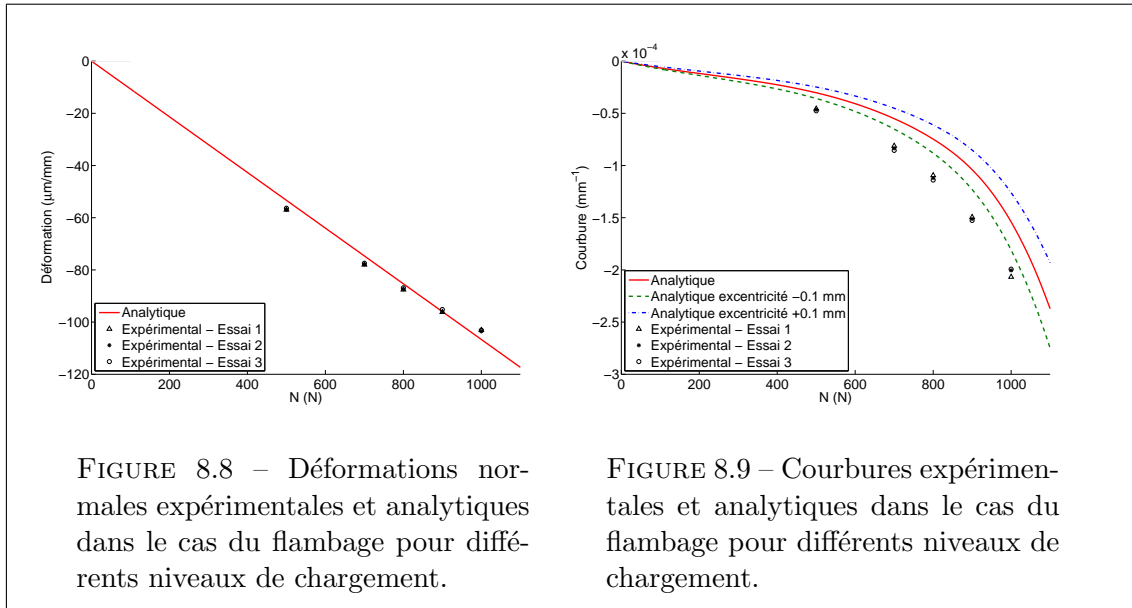


FIGURE 8.8 – Déformations normales expérimentales et analytiques dans le cas du flambage pour différents niveaux de chargement.

FIGURE 8.9 – Courbures expérimentales et analytiques dans le cas du flambage pour différents niveaux de chargement.

Une bonne concordance est trouvée entre les résultats expérimentaux et analytiques concernant la déformation normale. En revanche, la différence entre les courbures expérimentales et analytiques peut atteindre 20%. Cet écart est cohérent avec la différence constatée au niveau des flèches.

### 8.3.2 Déformations en extrémité du renfort

Contrairement au cas de la flexion trois points, le comportement pour un niveau de chargement ne peut être obtenu à partir d'un autre à l'aide d'une règle de trois. Ainsi quatre niveaux de chargement ont été étudiés. Les figures 8.10, 8.11, 8.12 et 8.13 rapportent les déformations longitudinales mesurées au dessus du renfort en extrémité par la chaîne de jauges. Les déformations expérimentales et analytiques sont du même ordre de grandeur. En revanche, l'allure des courbes diffère. Les déformations du modèle analytique reposent en partie sur la capacité à décrire correctement la courbure et la flèche de l'assemblage. Ainsi, les différences constatées sur les figures 8.7 et 8.9 se reportent sur les déformations au dessus du renfort. Toutefois, les résultats s'améliorent lorsque  $N$  augmente.

## 8.4 Conclusion

Les résultats expérimentaux ne permettent pas de comparer directement les contraintes de cisaillement et de pelage dans l'adhésif obtenues expérimentalement et analytiquement. Au travers de la déformation longitudinale sur la face extérieure du renfort, il est possible de conclure que le modèle analytique décrit correctement le pic de contrainte de cisaillement en extrémité dans le cas de la flexion 3 points. Ainsi, les résultats obtenus dans ce cas valident le modèle analytique de la contrainte de cisaillement développé dans le cadre de cette thèse.

Concernant le flambage, les résultats ne permettent pas de conclure sur le modèle. Seuls les résultats de l'éprouvette n°2 ont pu être exploités. La sensibilité au positionne-

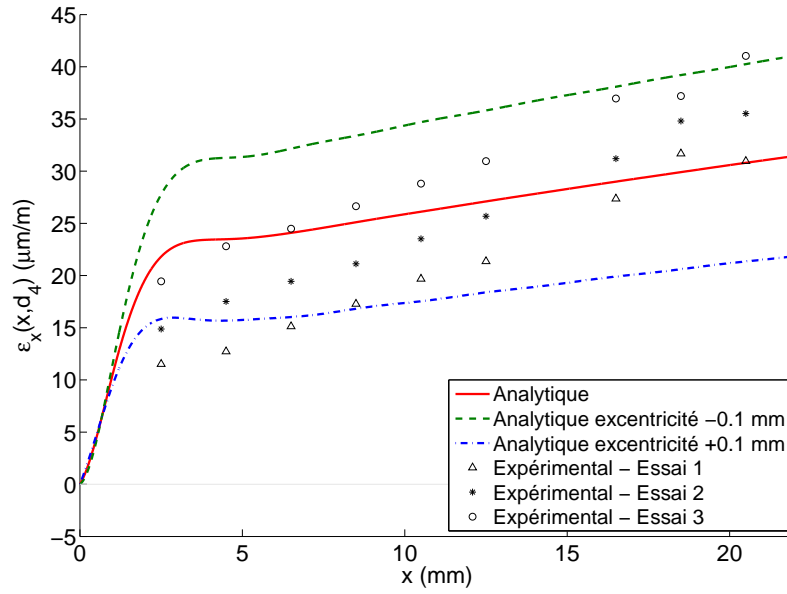


FIGURE 8.10 – Déformations longitudinales au dessus du renfort obtenues expérimentalement et analytiquement dans le cas du flambage pour  $N = 700$  N.

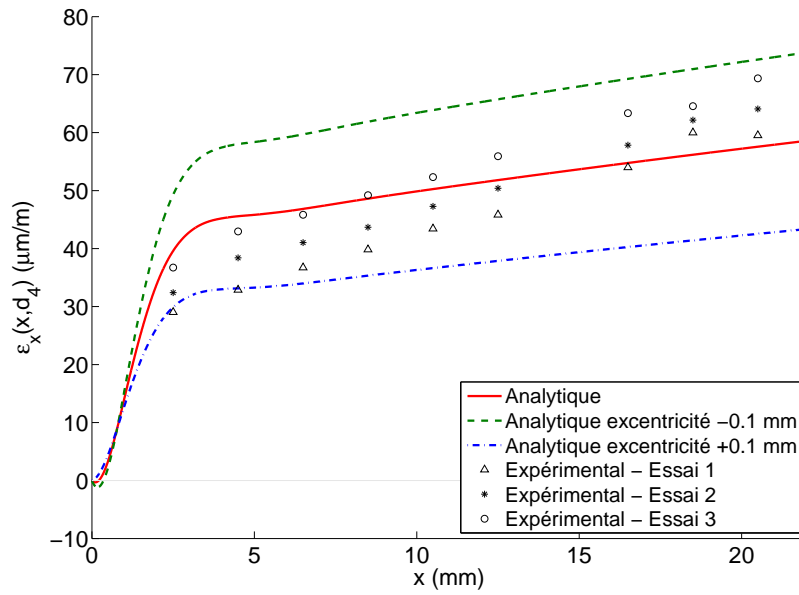


FIGURE 8.11 – Déformations longitudinales au dessus du renfort obtenues expérimentalement et analytiquement dans le cas du flambage pour  $N = 800$  N.

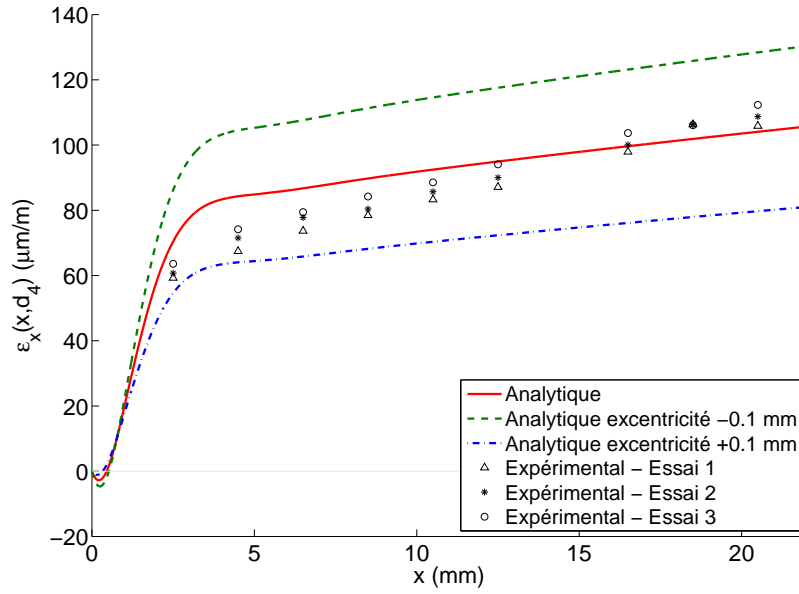


FIGURE 8.12 – Déformations longitudinales au dessus du renfort obtenues expérimentalement et analytiquement dans le cas du flambage pour  $N = 900 \text{ N}$ .

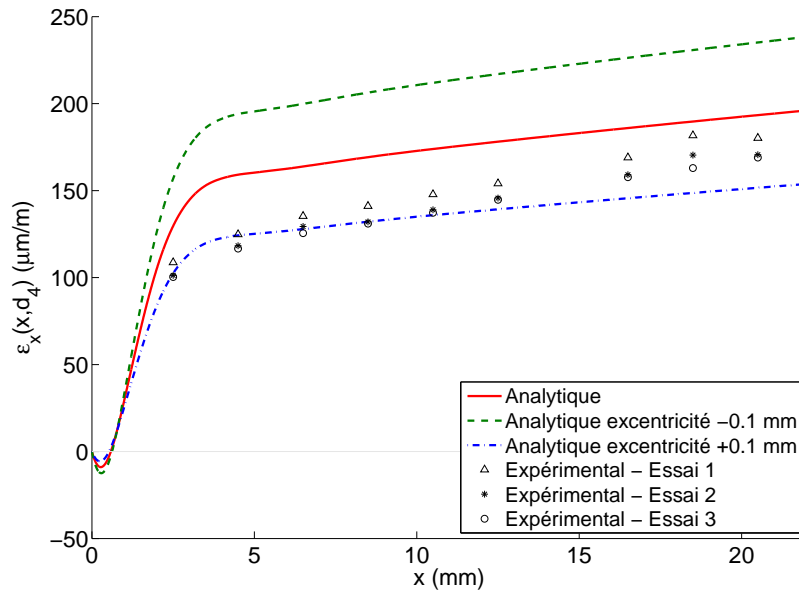


FIGURE 8.13 – Déformations longitudinales au dessus du renfort obtenues expérimentalement et analytiquement dans le cas du flambage pour  $N = 1000 \text{ N}$ .

ment de l'éprouvette dans les mors n'est pas négligeable. Une variation de l'excentricité de 0.1 mm modifie de 30% les déformations longitudinales au dessus du renfort. Afin d'étudier plus précisément le comportement en flambage, il serait nécessaire d'éliminer ce paramètre en améliorant le dispositif de fixation de l'éprouvette à ses extrémités (rotules ou encastrements). L'ordre de grandeur obtenu reste toutefois concordant.



## Conclusion et perspectives





## Conclusion

Un modèle d'interaction étendu a été développé dans le cadre de cette thèse. Il permet de définir finement l'état bidimensionnel de contrainte dans un joint d'adhésif (contrainte de cisaillement et contrainte de pelage) lorsque ce dernier est soumis à divers chargements mécaniques ou thermiques. Les matériaux sont supposés homogènes et isotropes. La déformation transverse du joint est prise en compte, ce qui conduit à un couplage entre la contrainte de cisaillement et la contrainte de pelage. Ce couplage intervient principalement en extrémité : la zone où le pic de contrainte apparaît. Les effets du second ordre dus à la flexion d'une structure élancée sont introduits par le biais de la différence de courbure de chacun des adhérents. La solution analytique développée dans le cadre de cette thèse a été comparée à divers modèles numériques. Les conclusions suivantes peuvent être faites :

1. Les équations définissant les contraintes de cisaillement et de pelage au sein d'un adhésif peuvent être établies sous la forme d'un système différentiel couplé. Une solution générale est présentée dans ce document. Elle est ensuite identifiée à diverses configurations types par l'introduction de conditions aux limites adaptées.
2. Afin d'évaluer correctement les contraintes au sein de l'adhésif, la flèche de la structure assemblée doit être calculée en tenant compte de la rigidité effective de la zone assemblée vis-à-vis de la flexion. Compte tenu de la diffusion des contraintes dans les zones d'extrémité des deux adhérents (zones de Saint-Venant), leurs rigidités flexionnelles ne peuvent être prises en compte dans leur intégralité qu'au delà de la zone de diffusion comptée à partir de l'extrémité de chaque adhérent. Il en résulte que la longueur efficace de la zone assemblée pour le calcul de la flèche  $w_0(x)$  est inférieure à la longueur totale de l'assemblage. Pour tenir compte de cet effet, la notion de longueur de diffusion  $l_0$  est introduite :  $L_r = L_{eff} + l_0$ . Il est important de tenir compte de  $l_0$  lorsque les effets du second ordre conditionnent la flèche (cas du joint à simple recouvrement et de la poutre renforcée comprimée).
3. Les solutions définies analytiquement dans ce document ont été comparées à des modèles éléments finis simulant des structures en flexion. Une très bonne concordance est trouvée entre les résultats numériques et analytiques. Le modèle d'interaction proposé améliore la précision des modèles existants dans la littérature pouvant atteindre 30% sur la contrainte de cisaillement et 80% sur la contrainte de pelage suivant les configurations étudiées. Cet apport est dû à la prise en compte du couplage entre la contrainte de cisaillement et la contrainte de pelage ainsi qu'aux effets de courbures.
4. Dans le cas de la poutre renforcée comprimée, du flambage apparaît de par l'excentricité apportée par le renfort. Dans cette configuration, les effets du second ordre sont très importants. Ils conditionnent la distribution de contrainte en zone courante. A partir de cette distribution correcte des contraintes en zone courante, il est possible de définir le pic de contrainte en tenant compte du couplage en extrémité. Le modèle a été comparé avec succès à des simulations numériques.
5. Quelle que soit la configuration testée, les résultats numériques et analytiques sont concordants, spécialement en zone d'extrémité où apparaît le pic de contrainte. Ce modèle d'interaction permet de définir précisément la distribution de contrainte au sein de l'adhésif. Il donne ainsi la possibilité de dimensionner un assemblage collé en ajustant les paramètres tels que le ratio de renforcement et l'épaisseur de l'adhésif.

6. Les résultats expérimentaux ne permettent pas de comparer directement les contraintes de cisaillement et de pelage dans l'adhésif obtenues expérimentalement et analytiquement. Au travers de la déformation longitudinale sur la face extérieure du renfort, il est possible de conclure que le modèle analytique décrit correctement le pic de contrainte de cisaillement en extrémité dans le cas de la flexion 3 points. Ainsi, les résultats expérimentaux obtenus dans ce cas valident le modèle analytique de la contrainte de cisaillement développé dans le cadre de cette thèse. Concernant le flambage, les résultats ne permettent pas de conclure sur le modèle. Seuls les résultats de l'éprouvette n°2 ont pu être exploités. La sensibilité au positionnement de l'éprouvette dans les mors n'est pas négligeable. Une variation de l'excentricité de 0.1 mm modifie de 30% les déformations longitudinales au dessus du renfort. Afin d'étudier plus précisément le comportement en flambage, il serait nécessaire d'éliminer ce paramètre en améliorant le dispositif de fixation de l'éprouvette à ses extrémités (rotules ou encastremements). L'ordre de grandeur des résultats obtenus est toutefois concordant avec les prédictions du modèle analytique et du modèle numérique.

## Perspectives

Lors du développement du modèle d'interaction, certaines hypothèses ont été conduites afin de simplifier la résolution du problème. Lors de la réalisation des éprouvettes, il a été constaté que supposer que le joint d'adhésif a une épaisseur constante n'est pas réaliste. En effet, même en essayant d'imposer une épaisseur avec des cales, cette épaisseur peut varier de 30% pour des adhérents identiques. Dans le cas d'adhérents avec des dilatations différentes, l'adhésif peut être totalement chassé de la zone de recouvrement au milieu de l'assemblage (principalement dû à la flexion des adhérents). Le système différentiel proposé dans ce document peut être repris avec une épaisseur d'adhésif variable suivant la direction longitudinale.

Les essais réalisés dans le cas de la poutre renforcée comprimée n'ont pas été satisfaisants. Dans le cas du flambage, le moindre défaut d'alignement peut avoir des conséquences considérables sur la distribution des contraintes au sein de l'adhésif. Il peut être intéressant d'appliquer le modèle d'interaction à une configuration plus proche des problématiques industrielles. Ainsi dans le cas des panneaux raidis, les bords sont encastres. Cette condition aux limites permet de réduire l'influence du défaut d'alignement constaté lors de la réalisation des essais. Il est également possible d'étudier une poutre renforcée bi-articulée avec des mors rotulés afin de mieux contrôler l'alignement initial.

Les aspects bidimensionnels, principalement dûs à la différence de coefficient de Poisson entre les deux adhérents sont susceptibles d'influencer la distribution des contraintes. Ce phénomène peut être pris en compte en réécrivant l'équilibre local dans le cas d'un élément tridimensionnel. Cela permettra l'application du modèle d'interaction à des panneaux raidis.

# Bibliographie

- [1] Adheria® la base de données des adhésifs. <http://www.carma-adheria.net/>.
- [2] Matweb - the online materials information resource. <http://www.matweb.com/>.
- [3] Release 10.0 documentation for ansys. Rapport technique, ANSYS, Inc., 2005.
- [4] Adhésifs - termes et définitions. Rapport technique NF EN 923, AFNOR, Janvier 2006.
- [5] R.D. ADAMS et B.W. DRINKWATER : Nondestructive testing of adhesively-bonded joints. *NDT&E International*, 30:93–98, 1997.
- [6] R.D. ADAMS et J. A. HARRIS : The influence of local geometry on the strength of adhesive joints. *International Journal of adhesion & adhesives*, 7:69–80, 1987.
- [7] R.D. ADAMS et V. MALLICK : A method for the stress analysis of lap joints. *The Journal of Adhesion*, 38:199–217, 1992.
- [8] R.D. ADAMS et N.A. PEPPIATT : Effect of poisson's ratio strains in adherents on stresses of an idealized lap joint. *Journal of strain analysis*, 8:134–139, 1973.
- [9] Robert D. ADAMS et William C. WAKE : *Structural Adhesive Joints in Engineering*. Elsevier Applied Science Publishers, 1984.
- [10] D.J. ALLMAN : A theory for elastic stresses in adhesive bonded lap joints. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 30:415–436, 1977.
- [11] B. BACHIR BOUIADJRA, M. BELHOUARI et B. SERIER : Computation of the stress intensity factors for repaired cracks with bonded composite patch in mode i and mixed mode. *Composite Structures*, 56:401–406, 2002.
- [12] A.A. BAKER, L.R.F. ROSE et R. JONES : *Advances in the Bonded Composite Repair of Metallic Aircraft Structures*. Elsevier, 2002.
- [13] Alan BAKER : Bonded composite repair of metallic aircraft components - overview of australian activities. *AGARD-CP-550*, pages 1–14, 1995.
- [14] Alan BAKER : Bonded composite repair of fatigue-cracked primary aircraft structure. *Composite Structures*, 47:431–443, 1999.
- [15] J.D. BARDIS et Kedward K.T. : Surface preparation effects on mode i testing of adhesively bonded composite joints. *Journal of Composites Technology & Research*, 24:30–37, 2002.
- [16] R.A. BARTHOLOMEUSZ, A.A. BAKER, R.J. CHESTER et A. SEARL : Bonded joints with through-thickness adhesive stresses - reinforcing the f/a-18 y470.5 bulkhead. *International Journal of Adhesion & Adhesives*, 19:173–180, 1999.

- [17] Yves BERTHAUD : Matériaux et propriétés - notes de cours uv2. *Université Pierre et Marie Curie*, 2004. <http://www.librecours.org/>.
- [18] Jean-Marie BERTHELOT : *Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures*. 4 édition.
- [19] D.A. BIGWOOD et A.D. CROCOMBE : Non-linear adhesive bonded joint design analyses. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 10:31–41, 1990.
- [20] S.W. BOYD, J.M. DULIEU-BARTON et L. RUMSEY : Stress analysis of finger joints in pultruded grp materials. *International Journal of Adhesion & Adhesives*, 26:498–510, 2006.
- [21] Marie-Anne BRUNEAUX : *Durabilité des assemblages collés : Modélisation mécanique et physico-chimique*. Thèse de doctorat, L'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2004.
- [22] M. BRUNET et F. SIDOROFF : Mécanique et thermodynamique des milieux continus en grandes déformations. *Institut National des Sciences Appliquées de Lyon*, 1995-1996.
- [23] Sandra L. CASE, Emmett P. O'BRIEN et Thomas C. WARD : Cure profiles, crosslink density, residual stresses, and adhesion in a model epoxy. *Polymer*, 46:10831–10840, 2005.
- [24] Peter CHALKLEY et Alan BAKER : Development of a generic repair joint for certification of bonded composite repairs. *International Journal of Adhesion & Adhesives*, 19:121–132, 1999.
- [25] Shun CHENG, Du CHEN et Yupu SHI : Analysis of adhesive-bonded joints with nonidentical adherends. *Journal of Engineering Mechanics*, 117:605–623, 1991.
- [26] Ki-Hyun CHUNG et Won-Ho YANG : A study on the fatigue crack growth behavior of thick aluminum panels repaired with a composite patch. *Composite Structures*, 60:1–7, 2003.
- [27] Jacques COGNARD : *Science et technologie du collage*. Presses polytechniques et universitaires romandes, 2000.
- [28] J.Y. COGNARD : Numerical analysis of edge effects in adhesively-bonded assemblies application to the determination of the adhesive behaviour. *Computers and Structures*, 86:1704–1717, 2008.
- [29] J.Y. COGNARD, R. CRÉAC'HCADEC, L. SOHIER et P. DAVIES : Analysis of the nonlinear behavior of adhesives in bonded assemblies - comparison of fast and arcan tests. *International Journal of Adhesion & Adhesives*, 28:393–404, 2008.
- [30] J.Y. COGNARD, P. DAVIES, L. SOHIER et R. CRÉAC'HCADEC : A study of the non-linear behaviour of adhesively-bonded composite assemblies. *Composites Structures*, 76:34–46, 2006.
- [31] P. COUDOR, S. Van der VEEN et Beakou A. : Global-local analysis of bonde skin-to-stiffener joints in post-buckling panels. In *25<sup>th</sup> International Congress of the Aeronautical Sciences*, 2006.
- [32] Cytec Engineered Materials, Technical Service - Havre de Grace, MD 21078. *FM<sup>®</sup> 73 Toughened Epoxy Film*.

- 
- [33] Lucas F.M. da SILVA, , Paulo J.C. das NEVES, R.D. ADAMS et J.K. SPELT : Analytical models of adhesively bonded joints-part i : Literature survey. *International Journal of Adhesion & Adhesives*, 2008.
- [34] Lucas F.M. da SILVA et R.D. ADAMS : Techniques to reduce the peel stresses in adhesive joints with composites. *International Journal of Adhesion & Adhesives*, 27, 2007.
- [35] Maxwell DAVIS et David BOND : Principles and practices of adhesive bonded structural joints and repairs. *International Journal of Adhesion & Adhesives*, 19:91–105, 1999.
- [36] N.A. de BRUYNE : The strength of glued joints. *Aircraft Engineering*.
- [37] Michel DEL PEDRO, Thomas GMÜR et John BOTSIS : *Eléments de mécanique des structures*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2001.
- [38] F. DELALE, F. ERDOGAN et M.N. AYDINOGLU : Stresses in adhesively bonded joints : A closed-form solution. *Journal of Composite Materials*, 15:249–271, 1981.
- [39] C.N. DUONG, L. J. HART-SMITH et J. YU : Analytical approach to bonded repair of elliptical dent, corrosion grind-out, and cut-out. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 36:187–193, 2001.
- [40] F. ELBING, N. ANAGREH, L. DORN et E. UHLMANN : Dry ice blasting as pretreatment of aluminum surfaces to improve the adhesive strength of aluminum bonding joints. *International Journal of Adhesion & Adhesives*, 23:69–79, 2003.
- [41] E. FERRIER, D. BIGAUD, P. HAMELIN, L. BIZINDAVYI et W. NEALE : Fatigue of CFRPs externally bonded to concrete. *Materials and structures*, 38:39–45, 2005.
- [42] Y. FROSTIG, T. O. THOMSEN et F. MORTENSEN : Analysis of adhesive-bonded joints, square-end, and spew-fillet-high-order theory approach. *Journal of Engineering Mechanics*, 125:1298–1307, 1999.
- [43] Alexandre GACOIN : *Etude expérimentale et numérique du comportement micro-mécanique des liaisons collées de type sifflet et double sifflet*. Thèse de doctorat, Université de Reims Champagne-Ardenne, 2007.
- [44] S. GALI, G. DOLEV et O. ISHAI : An effective stress/strain concept in the mechanical characterization of structural adhesive bonding. *International Journal of Adhesion & Adhesives*, 1:135–140, 1981.
- [45] M. GLEICH, M. TOOREN et A. BEUKERS : Analysis of bondline thickness effects on failure load in adhesively bonded structures. In *32<sup>nd</sup> International SAMPE Technical Conference*, November 2000.
- [46] M. GOLAND et E. REISSNER : The stresses in cemented joints. *Journal of Applied Mechanics*, 1:A17–A27, 1944.
- [47] J. GOULET et J.P. BOUTIN : *Aide-mémoire de résistance des matériaux*. Dunod, 1996.
- [48] I. GRABOVAC, R.A. BARTHOLOMEUSZ et A.A. BAKER : Composite reinforcement of a ship superstructure - project overview. *Composites*, 24:501–509, 1992.
- [49] J.A. HARRIS et R.D. ADAMS : Strength prediction of bonded single lap joints by nonlinear finite element methods. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 4:65–78, 1984.

- [50] L.J. HART-SMITH : Adhesive-bonded double-lap joint. Rapport technique Nasa CR 112235, Nasa, January 1973.
- [51] L.J. HART-SMITH : Adhesive-bonded scarf and stepped-lap joints. Rapport technique Nasa CR 112237, Nasa, 1973.
- [52] L.J. HART-SMITH : Adhesive-bonded single-lap joints. Rapport technique Nasa CR 112236, Nasa, 1973.
- [53] L.J. HART-SMITH : Analysis and design of advanced composite bonded joints. Rapport technique Nasa CR 2218, Nasa, 1974.
- [54] L.J. HART-SMITH : A peel-type durability test coupon to assess interfaces in bonded, co-bonded, and co-cured composite. *International Journal of Adhesion & Adhesives*, 19:181–191, 1999.
- [55] S.A. HASHIM : Adhesive bonding of thick steel adherends for marine structures. *Marine Structures*, 12:405–423, 1999.
- [56] Bill HEIMERDINGER et M.M. RATWANI : Influence of composite repair patch dimensions on crack growth rate of cracked metallic structures. *In The Third joint Conference on Aging Aircraft*, 1999.
- [57] R.B. HESLEHURST et L.J. HART-SMITH : The science and art of structural adhesive bonding. *SAMPE Journal*, 38:60–71, March-April 2002.
- [58] Hexcel. *Redux<sup>®</sup> 312 - Modified epoxy film adhesive*, 2007.
- [59] A. HIGGINS : Adhesive bonding of aircraft structures. *International Journal of Adhesion & Adhesives*, 20:367–376, 2000.
- [60] D.M. HOYT, Stephen H. WARD et Pierre J. MINGUET : Strength and fatigue life modeling of bonded joints in composite structure. *Journal of composites technology & research*, 24:188–208, 2002.
- [61] Huntsman. *Araldite<sup>®</sup> 2015 (AV 5308/ HV 5309-1)*.
- [62] R.J. HUSSEY et J. WILSON : *Structural Adhesives Directory and Databook*. Chapman and Hall, 1996.
- [63] O. ISHAI et G. DOLEV : Mechanical characteristics of structural adhesions. (030-510), 1979.
- [64] J.P. JEANDRAU : Technologie du collage structural pour les applications en mécanique. *Publications CETIM, Etablissement de Saint-Etienne*, 1993.
- [65] J.P. JEANDRAU et J. LEMAIRE : 40% d'économie sur vos assemblages : le collage le permet aujourd'hui! *In Les lundis de la mécanique*, Clermont-Ferrand, Novembre 2006.
- [66] R.R. KELLER, A. ROSHKO, R.H. GEISS, K.A. BERTNESS et T.P. QUINN : Ebsd measurement of strains in gaas due to oxidation of buried algaas layers. *Microelectronic Engineering*, 75:96–102, 2004.
- [67] A.J. KINLOCH : *Adhesion and adhesives : science and technology*. Chapman and Hall, 1987.
- [68] S. KRENK, J. JÖNSSON et L.P. HANSEN : Fatigue analysis and testing of adhesive joints. *Engineering Fracture Mechanics*, 53:859–872, April 1996.

- 
- [69] Serge LAROZE : *Mécanique des structures : Tome 2 - Poutres*. Cépaduès Editions, 2005.
- [70] Jean LEMAITRE et Jean-Louis CHABOCHE : *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, 2004.
- [71] M.R. LENA, J.C. KLUG et C.T. SUN : Composite patches as reinforcements and cracks arrestors in aircraft structures. *Journal of Aircraft*, 35, March-April 1998.
- [72] Gang LI, Pearl LEE-SULLIVAN et Ronald W. THRING : Nonlinear finite element analysis of stress and strain distributions across the adhesive thickness in composite single-lap joints. *Composite Structures*, 46:395–403, 1999.
- [73] C.K. LIM, M.A. ACITELLI et W.C. HAMN : *Journal of Adhesion*, 6:281–288, 1974.
- [74] K.C. LIN et C.M. HSIEH : The closed form general solutions of 2-d curved laminated beams of variable curvatures. *Composite Structures*, 79:606–618, 2007.
- [75] R.F. MANDER : Use of resins in road and bridge construction and repair. *International Journal of Adhesion & Adhesives*, 3:27–39, February 1981.
- [76] J.D. MATHIAS, M. GRÉDIAC et X. BALANDRAUD : On the bidirectional stress distribution in rectangular bonded composite patches. *International Journal of Solids and Structures*, 43:6921–6947, 2006.
- [77] Jean-Denis MATHIAS : *Etude du comportement mécanique de patchs composites utilisés pour le renforcement de structures métalliques aéronautiques*. Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal - Clermont II, 2005.
- [78] Jean-Denis MATHIAS, Xavier BALANDRAUD et Michel GRÉDIAC : Experimental investigation of composite patches with a full-field measurement method. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 37:177–190, 2006.
- [79] Cédric MATHON : *Flambage sous flexion et pression interne de coques cylindriques minces*. Thèse de doctorat, M.E.G.A. : Mécanique, Energétique, Génie-Civil et Acoustique, 2004.
- [80] Michel MAYA : Stabilité appliquée. *Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers - Centre régional de Cluny*, 2006. <http://www.cluny.ensam.fr/MAYA/Insta/amphi/index.htm>.
- [81] K.L. MITTAL et Pizzi A. : *Adhesion Promotion Techniques : Technical Applications*. Marcel Dekker, 1999.
- [82] H. MONTERNOT, D. BÉNAZET et H. ANCENAY : *Guide du collage*. CETIM, 1978.
- [83] F. MORTENSEN et O.T. THOMSEN : Analysis of adhesive bonded joints : a unified approach. *Composites Science and Technology*, 62:1011–1031, 2002.
- [84] Flemming MORTENSEN et Ole Thybo THOMSEN : Simplified linear and non-linear analysis of stepped and scarfed adhesive-bonded lapjoints between composite laminates. *Composite Structures*, 38:281–294, 1997.
- [85] Randolph A. ODI et Clifford M. FRIEND : An improved 2d model for bonded composite joints. *International Journal of Adhesion & Adhesives*, 24:389–405, 2004.
- [86] I.U. OJALVO et H.L. EIDINOFF : Bond thickness effects upon stresses in single-lap adhesive joints. *AIAA Journal*, 16:204–211, 1978.



- [87] A.Chukwujekwu OKAFOR, Navdeep SINGH et S.V. ENEMUOH, U.E.and Rao : Design, analysis and performance of adhesively bonded composite patch repair of cracked aluminum aircraft panels. *Composite Structures*, 71:258–270, 2005.
- [88] D.W. OPLINGER : Effects of adherend deflections in single lap joints. *International Journal of Solids and Structures*, 31:2565–2587, 1994.
- [89] A.C. ORIFICI, R.S. THOMSON, R. DEGENHARDT, A. KLING, K. ROHWER et J. BAYANDOR : Degradation investigation in a postbuckling composite stiffened fuselage panel. *Composite Structures*, 82:217–224, 2008.
- [90] P.C. PANDEY et S. NARASIMHEN : Three-dimensional nonlinear analysis of adhesively bonded lap joints considering viscoplasticity in adhesives. *Computers and structures*, 79:769–783, 2001.
- [91] P.C. PANDEY, H. SHANKARAGOUDA et Arbind Kr. SINGH : Nonlinear analysis of adhesively bonded lap joints considering viscoplasticity in adhesives. *Computers and Structures*, 70:387–413, 1999.
- [92] S.T. PINHO, C.G. DÁVILA, P.P. CAMANHO, L. IANNUCCI et P. ROBINSON : Failure models and criteria for frp under in-plane or three-dimensional stress states including shear non-linearity. Rapport technique NASA/TM-2005-213530, Nasa, February 2005.
- [93] Juris PIRVICS : Two dimensional displacement-stress distributions in adhesive bonded composite structures. *The Journal of Adhesion*, 6:207–228, 1974.
- [94] Sylvain POPINEAU : *Durabilité en milieu humide d'assemblages structuraux collés type aluminium/composite*. Thèse de doctorat, L'Ecole des Mines de Paris, 2005.
- [95] J.W. RENTON et J.R. VINSON : The efficient design of adhesive bonded joints. *The Journal of Adhesion*, 7:175–193, 1975.
- [96] J.W. RENTON et J.R. VINSON : On the behavior of bonded joints in composite material structures. *Engineering Fracture Mechanics*, 7:41–52, March 1975.
- [97] V. SAFAVI-ARDEBILI, J.K. SPELT et A.N. SINCLAIR : Experimental investigation of the interphase in an epoxy-aluminum system. *Journal of Adhesion*, 62:93–111, 2000.
- [98] Gary SAVAGE : Failure prevention in bonded joints on primary load bearing structures. *Engineering Failure Analysis*, 14:321–348, 2007.
- [99] T. SAWA, J. LIU, K. NAKANO et J. TANAKA : A two-dimensional stress analysis of single-lap adhesive joints of dissimilar adherends subjected to tensile loads. *Journal of Adhesion Science and Technology*, 14:43–66, 2000.
- [100] Dae-Cheol SEO et Jung-Ju LEE : Fatigue crack growth behavior of cracked aluminum plate repaired with composite patch. *Composite Structures*, 57:323–330, 2002.
- [101] V. SIERRA-RUIZ, J.-F. DESTREBECQ et M. GRÉDIAC : The transfer length in concrete structures repaired with composite materials : a survey of some analytical models and simplified approaches. *Composite Structures*, 55:445–454, 2002.
- [102] Verónica SIERRA RUIZ : *Renforcement d'éléments structuraux en béton armé à l'aide de matériaux composites : Analyse fine de la zone d'ancrage*. Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal - Clermont II, 2002.
- [103] J. SINGER, J. ARBOCZ et T. WELLER : *Buckling experiments : Experimental methods in buckling of thin-walled structures*, volume 1. John Wiley and Sons, Inc., 1998.

- 
- [104] Stanley S. SMELTZER III et Eric C. KLANG : Analysis method for inelastic, adhesively bonded joints with anisotropic adherends. *In Proceedings of the American Society for Composites 18<sup>th</sup> Technical Conference*, 2003.
  - [105] Stanley S. SMELTZER III et Eric LUNDGREN : Analytical and numerical results for an adhesively bonded joint subjected to pure bending. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, May 2006.
  - [106] S.T. SMITH et J.G. TENG : Interfacial stresses in plated beams. *Engineering Structures*, 23:857–871, 2001.
  - [107] S. SRINIVAS : Analysis of bonded joints. Rapport technique A875303, Nasa, April 1975.
  - [108] Klug J.A. SUN C.T. : Analysis of cracked aluminum plates repaired with bonded composite patches. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 34:369–374, 1996.
  - [109] Farid TAHERI et Jinqian CHENG : A novel smart adhesively bonded joint system. *Smart Materials and Structures*, 14:971–981, 2005.
  - [110] E.W. THRALL et R.W. SHANNON : *Adhesive Bonding of Aluminum Alloys*. Dekker, 1985.
  - [111] Stephen P. TIMOSHENKO et James M. GERE : *Theory of elastic stability*. McGraw-Hill, Inc., 1961.
  - [112] John TOMBLIN, Pierre HARTE, Waruna SENEVIRATNE et Charles YANG : Characterization of bondline thickness effects in adhesive joints. *Journal of composites technology & research*, 24:332–344, 2002.
  - [113] L. TONG : Bond strength for adhesive-bonded single-lap joints. *Acta Mechanica*, 117:101–113, 1996.
  - [114] L. TONG, A. SHEPPARD et D. KELLY : The effect of adherend alignment on the behaviour of adhesively bonded double lap joints. *International Journal of adhesion & adhesives*, 16:241–247, 1996.
  - [115] Liyong TONG et Grant P. STEVEN : *Analysis and Design of Structural Bonded Joints*. Kluwer Academic Publishers, 1999.
  - [116] A. TOWSE, K.D. POTTER, M.R. WISNOM et R.D. ADAMS : The sensitivity of a weibull failure criterion to singularity strength and local geometry variations. *International Journal of Adhesion & Adhesives*, 19:71–82, 1999.
  - [117] M.Y. TSAI et J. MORTON : The effect of a spew fillet on adhesive stress distributions in laminated composite single-lap joints. *Composite Structures*, 32:123–131, 1995.
  - [118] M.Y. TSAI, D.W. OPLINGER et J. MORTON : Improved theoretical solutions for adhesive lap joints. *International Journal of Solids and Structures*, 35:1163–1185, 1998.
  - [119] Jean-Jacques VILLENAVE : *Assemblage par collage*. Dunod, 2005.
  - [120] O. VOLKERSEN : Die nietkraftverteilung in zugbeanspruchten nietverbindungen mit konstanten laschenquerschnitten. *Luftfahrtforschung*, 7:15–47, 1938.
  - [121] Thein WAH : Stress distribution in a bonded anisotropic lap joint. *Journal of Engineering Materials and Technology, Transactions of the ASME*, 95:174–181, 1973.

- [122] C.H. WANG et L.R.F. ROSE : Determination of triaxial stresses in bonded joints. *International Journal of adhesion & adhesives*, 17:17–25, 1997.
- [123] C.H. WANG et L.R.F. ROSE : Compact solutions for the corner singularity in bonded lap joints. *International Journal of Adhesion & Adhesives*, 20:145–154, 2000.
- [124] R.X. WANG, J. CUI, A.N. SINCLAIR et J.K. SPELT : Strength of adhesive joints with adherend yielding : I. analytical model. *The Journal of Adhesion*, 79:23–48, 2003.
- [125] Chihdar YANG et Su-Seng PANG : Stress-strain analysis of single-lap composite joints under tension. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 118:247–256, 1996.
- [126] Phil YARRINGTON, Jian ZHANG, Craig COLLIER et Brett A. BEDNARCYK : Failure analysis of adhesive bonded composite joints. *Institute of Aeronautics and Astronautics*, April 2005.
- [127] Yuqiao ZHU et Keith KEDWARD : Methods of analysis and failure predictions for adhesively bonded joints of uniform and variable bondline thickness. Rapport technique DOT/FAA/AR-05/12, U.S. Department of Transportation. Federal Aviation Administration. Office of Aviation Research, Washington, DC 20591, May 2005.
- [128] G.P. ZOU, K. SHAHIN et F. TAHERI : An analytical solution for the analysis of symmetric composite adhesively bonded joints. *Composite Structures*, 65:499–510, 2004.

# Annexes



## Annexe A

# Propriétés mécaniques d'adhésif époxydes

### A.1 Araldite<sup>®</sup> 2015

C'est un adhésif époxyde bicomposant en pâte avec une grande résistance au cisaillement et au pelage. Il est adapté au collage des métaux et des composites. Le tableau A.1 donne les valeurs minimales et maximales de propriétés mécaniques obtenues à partir d'adhésifs répertoriés sur Matweb [2].

### A.2 Cytec FM<sup>®</sup> 73

C'est un film d'adhésif epoxyde-nitrile qui nécessite un prétraitement de surface à l'aide de la résine époxyde-phénolique Cytec BR<sup>®</sup> 127 [16]. La polymérisation est réalisée entre 115°C et 125°C [32]. Le tableau A.2 donne des exemples d'utilisation de la FM<sup>®</sup> 73 en aéronautique. Pandey, Shankaragouda et Singh utilisent l'équation de Ramberg-Osgood pour modéliser la courbe contrainte/déformation de l'adhésif FM<sup>®</sup> 73. L'équation de Ramberg-Osgood peut s'écrire sous une forme adimensionnelle :

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{ch}} = \frac{\sigma}{\sigma_{ch}} \left[ 1 + \left( \frac{\sigma}{\sigma_{ch}} \right)^{r-1} \right] \quad (\text{A.1})$$

Propriété	Valeur	Norme du test
Module d'Young	2 GPa	
Résistance au cisaillement	17 MPa	ISO 4587
Résistance à la traction	30 MPa	ISO 527
Allongement à la rupture	4.4%	
Température de transition vitreuse		
- Durcissement : 16h à 40°C	67°C	
- Durcissement : 1h à 80°C	87°C	

TABLE A.1 – Propriétés matériaux de l'Araldite<sup>®</sup> 2015 à 23°C. Le test de la résistance de cisaillement a été réalisé sur des éprouvettes de type Aluminium-Aluminium [20] [61].

Avion	Année du premier vol
SAAB 340	1983
Airbus A300	1983
Airbus A310	1982

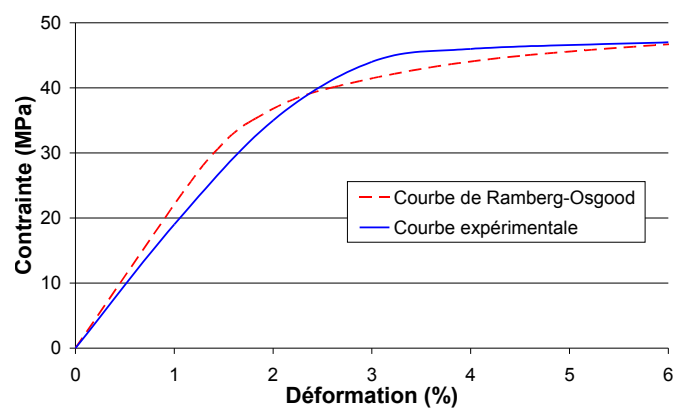
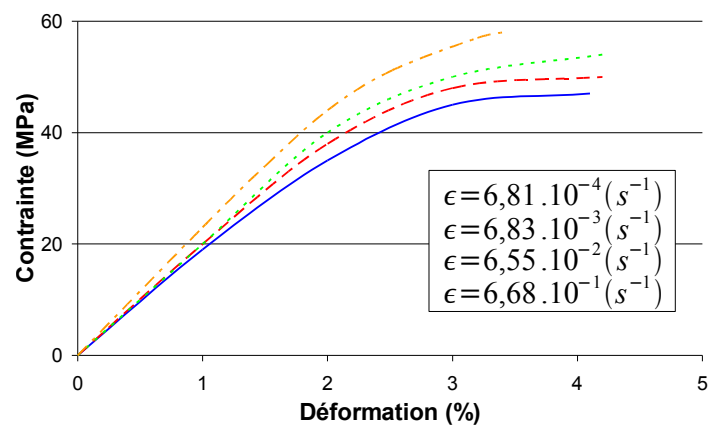
TABLE A.2 – Exemple d'utilisation de la Cytec FM<sup>®</sup> 73 avec collage à chaud et traitement de surface avec Cytec BR<sup>®</sup> 127 [59].

Propriété	Valeur	Référence
Module d'Young	2.21 GPa	[91]
Module de cisaillement	523 MPa	[16]
Module de cisaillement (en torsion et à TA)	578 MPa	[110]
	800 MPa	[24]
Coefficient de Poisson	0.35	[16] [24]
	0.43	[91]
Résistance au cisaillement		
- à -55°C	30 MPa	[59]
- à +80°C	25 MPa	[59]
- à TA	35-40 MPa	[59]
Résistance au pelage à température ambiante	9.6-13.8 N.mm <sup>-1</sup>	[59]
Allongement à la rupture (en torsion et à TA)	61.5%	[110]
Paramètres de Ramberg-Osgood		
- $r$	9.999	[91]
- $\sigma_{ch}$	43.957 MPa	[91]
Rapport $\lambda = \sigma_y^c / \sigma_y^t$	1.4	[91]

TABLE A.3 – Propriétés matériaux de la FM<sup>®</sup> 73. TA= Température Ambiante

Où  $\varepsilon_{ch}$  est la déformation caractéristique,  $\sigma_{ch}$  la contrainte caractéristique. Ces paramètres sont reliés  $\sigma_{ch} = E\varepsilon_{ch}$ . Les paramètres inconnus  $\sigma_{ch}$  et  $r$  ont été obtenus par la méthode des moindres carrés. Leur valeur est rapportée dans le tableau A.3. La courbe ainsi obtenue est présentée figure A.1.

De plus, Pandey, Shankaragouda et Singh présentent l'influence de la fréquence de sollicitation sur la courbe contrainte/déformation [91] (Figure A.2). Ils mettent en évidence le comportement viscoplastique de l'adhésif.

FIGURE A.1 – Courbe Ramberg-Osgood de la FM<sup>®</sup> 73 [91].FIGURE A.2 – Influence de la vitesse de sollicitation sur la courbe contrainte/déformation de la FM<sup>®</sup> 73 [91].





## Annexe B

# Simplification en zone d'extrémité

L'objectif est de simplifier l'expression de l'équation 2.16. Elle se réécrit :

$$\tau_{xz}^a(x) = \frac{\lambda t_r}{\omega} \left( \sinh(\omega x) + \frac{1 - \cosh(\omega L)}{\sinh(\omega L)} \cosh(\omega x) \right) \quad (\text{B.1})$$

$$= \lambda t_r l_0 \exp\left(\frac{-x}{l_0}\right) \left[ \frac{-1 + \exp\left(\frac{-L}{l_0}\right) + \exp\left(\frac{2x-L}{l_0}\right) - \exp\left(\frac{2(x-L)}{l_0}\right)}{1 - \exp\left(\frac{-2L}{l_0}\right)} \right] \quad (\text{B.2})$$

$$= \lambda t_r l_0 \exp\left(\frac{-x}{l_0}\right) f(x) \quad (\text{B.3})$$

Par la suite, avec les valeurs usuelles, l'hypothèse est faite d'avoir  $l_0 \ll L/2$  [101]. Il en résulte :

$$\exp\left(\frac{-L}{l_0}\right) \neq 0 \quad (\text{B.4})$$

Donc,

$$f(x) = \left[ \frac{-1 + \exp\left(\frac{-L}{l_0}\right) + \exp\left(\frac{2x-L}{l_0}\right) - \exp\left(\frac{2(x-L)}{l_0}\right)}{1 - \exp\left(\frac{-2L}{l_0}\right)} \right] \quad (\text{B.5})$$

$$\# -1 + \exp\left(\frac{2x-L}{l_0}\right) - \exp\left(\frac{2(x-L)}{l_0}\right) \quad (\text{B.6})$$

$$\# -1 + \left[ 1 - \exp\left(\frac{-L}{l_0}\right) \right] \exp\left(\frac{-(L-2x)}{l_0}\right) \quad (\text{B.7})$$

$$\# -1 + \exp\left(\frac{-(L-2x)}{l_0}\right) \quad (\text{B.8})$$

Il vient,

$$\tau_{xz}^a(x) = \lambda t_r l_0 \exp\left(\frac{-x}{l_0}\right) \left[ -1 + \exp\left(\frac{-(L-2x)}{l_0}\right) \right] \quad (\text{B.9})$$

En zone d'extrémité,  $x \in \left[0, \frac{L}{2}\right]$ ,

$$\exp\left(\frac{-x}{l_0}\right) \left[-1 + \exp\left(\frac{-(L-2x)}{l_0}\right)\right] = -\exp\left(\frac{-x}{l_0}\right) + \exp\left(\frac{-L+x}{l_0}\right) \quad (\text{B.10})$$

$$\# -\exp\left(\frac{-x}{l_0}\right) \quad (\text{B.11})$$

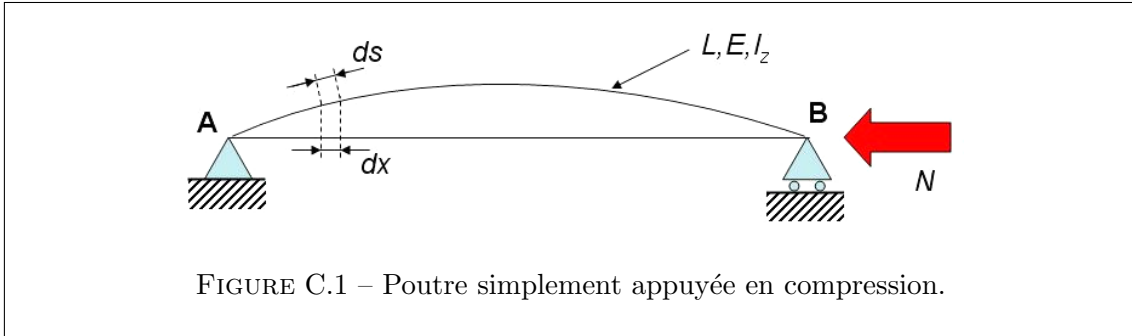
Finalement,

$$\tau_{xz}^a(x) = -\lambda t_r l_0 \exp\left(\frac{-x}{l_0}\right) \quad (\text{B.12})$$

## Annexe C

# Flambage : Méthode énergétique

La méthode énergétique permet de déterminer une valeur approchée de la charge critique lorsqu'il est impossible de déterminer une solution de l'équation différentielle régissant la flèche. Pour ce faire, une forme de déformée doit être supposée a priori. Cette



méthode est illustrée sur l'exemple du cas fondamental [111]. La figure C illustre la configuration de l'étude. La déformée peut être approchée par une série trigonométrique :

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{L} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{L} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{L} + \dots \quad (\text{C.1})$$

L'énergie de déformation s'écrit :

$$\Delta U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{N^2}{2EI} \int_0^L y^2 dx \quad (\text{C.2})$$

En utilisant l'équation C.1, l'énergie de déformation devient :

$$\Delta U = \frac{N^2 L}{4EI} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \quad (\text{C.3})$$

Comme le montre la figure C,

$$ds - dx = dx \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} - dx \approx \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx \quad (\text{C.4})$$

Ainsi, le déplacement vertical pendant le flambage s'écrit :

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx \quad (\text{C.5})$$

De là, le travail des forces durant le flambage s'exprime :

$$\Delta T = N\lambda = \frac{N}{2} \int_0^L \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \frac{\pi^2 N}{4L} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2 \quad (\text{C.6})$$

A l'équilibre,  $\Delta U = \Delta T$ , il vient :

$$N = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2} \quad (\text{C.7})$$

La charge critique  $N_{CR}$  correspond à la valeur minimale de C.7. Cette valeur est atteinte lorsque tous les  $a_i$  sont nuls sauf un. Dans le cas des poutres,  $n^2$  est minimum pour  $n = 1$ . Ainsi, il faut prendre  $a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$  et  $a_1 \neq 0$ . Il vient :

$$N_{CR} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (\text{C.8})$$

et la flèche a pour équation :

$$y(x) = a_1 \sin \frac{\pi x}{L} \quad (\text{C.9})$$

La méthode énergétique renvoie la valeur exacte de la charge critique lorsque la forme de la déformée exacte est utilisée. Dans le cas contraire, la charge critique calculée sera toujours supérieure à la valeur exacte (la déformée réelle prend spontanément la forme qui rend minimale la charge critique) [37]. Par conséquent, lorsqu'il est possible d'approximer la déformée de plusieurs façons, il faudra ne retenir que celle qui donne la charge critique la plus faible.

## Annexe D

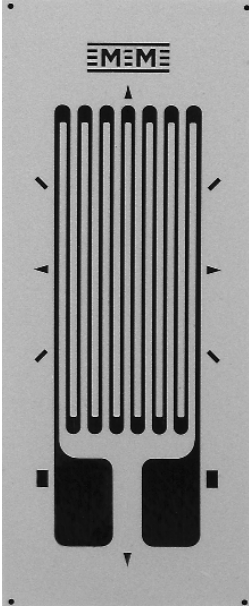
# Jauges d'extensométrie

Les jauges utilisées pour mesurer les déformations au milieu de l'éprouvette sont les jauges de Vishay référencés 250BG. La chaînette de jauge permettant de mesurer les déformations en extrémité sur la face extérieure du renfort provient également de chez Vishay. Elle est référencée 031MF.

**250BG**

Vishay Micro-Measurements

**General Purpose Strain Gages - Linear Pattern**

<b>GAGE PATTERN DATA</b>					
			<b>GAGE DESIGNATION</b>	<b>RESISTANCE (OHMS)</b>	<b>OPTIONS AVAILABLE</b>
			See Note 1, 3	See Note 2	See Note 3
			EA-XX-250BG-120 ED-DY-250BG-350 <b>WA-XX-250BG-120</b> WK-XX-250BG-350 EA-XX-250BG-100 EP-XX-250BG-120 <b>SA-XX-250BG-120</b> <b>SK-XX-250BG-350</b> <b>SD-DY-250BG-350</b> WD-DY-250BG-350	120 ± 0.15% 350 ± 0.3% 120 ± 0.3% 350 ± 0.3% 100 ± 0.15% 120 ± 0.15% 120 ± 0.3% 350 ± 0.3% 350 ± 0.6% 350 ± 0.6%	W, E, L, LE, <b>P</b> E, L*, LE* <b>W*</b> <b>W*</b>
			<b>DESCRIPTION</b>  Widely used general-purpose gage. Compact geometry. See also 250UN pattern.		
<b>GAGE DIMENSIONS</b>		Legend:	ES = Each Section S = Section (S1 = Sec 1)	CP = Complete Pattern M = Matrix	<div>inch</div> <div>millimeter</div>
Gage Length	Overall Length	Grid Width	Overall Width	Matrix Length	Matrix Width
0.250	0.375	0.125	0.125	0.52	0.22
6.35	9.53	3.18	3.18	13.2	5.6

<b>GAGE SERIES DATA</b>				See Gage Series data sheet for complete specifications.	
Series	Description	Strain Range	Temperature Range		
EA	Constantan foil in combination with a tough, flexible, polyimide backing.	±3%	-100° to +350°F [-75° to +175°C]		
ED	Isoelastic foil in combination with tough, flexible polyimide film.	±2%	-320° to +400°F [-195° to +205°C]		
WA	Fully encapsulated constantan gages with high-endurance leadwires.	±2%	-100° to +400°F [-75° to +205°C]		
WK	Fully encapsulated K-alloy gages with high-endurance leadwires.	±1.5%	-452° to +550°F [-269° to +290°C]		
EP	Annealed constantan foil with tough, high-elongation polyimide backing.	±20%	-100° to +400°F [-75° to +205°C]		
SA	Fully encapsulated constantan gages with solder dots.	±2%	-100° to +400°F [-75° to +205°C]		
SK	Fully encapsulated K-alloy gages with solder dots.	±1.5%	-452° to +450°F [-269° to +230°C]		
SD	Equivalent to WD Series, but with solder dots instead of leadwires.	±1.5%	-320° to +400°F [-195° to +205°C]		
WD	Fully encapsulated isoelastic gages with high-endurance leadwires.	±1.5%	-320° to +500°F [-195° to +260°C]		

**Note 1:** Insert desired S-T-C number in spaces marked XX.**Note 2:** Tolerance is increased when Option W, E, SE, LE, or P is specified.**Note 3:** Products with designations and options shown in bold are not RoHS compliant.


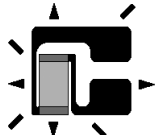
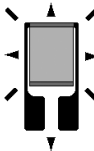
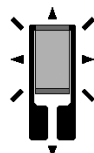
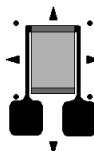
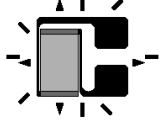
\*Options available but not normally recommended. See Optional Features data sheet for details.



## Other Linear Patterns

### Vishay Micro-Measurements

#### General Purpose Strain Gages

GAGE PATTERN	GAGE SERIES See Note 1	GAGE RESISTANCE (ohms)	GAGE LENGTH	
			inches	millimeters
<b>031MF</b> 	EA, <b>SA</b>	120	0.031	0.79
Miniature ten-element strip gage with electrically independent grids. All grids parallel to long axis of pattern. Grid centerline spacing 0.080 in (2.03 mm). Matrix size: 0.94L x 0.19W in. (23.9L x 4.8W mm)				
<b>032SG</b> 	EA, <b>WA</b> , WK, EP, <b>SA</b> , <b>SK</b>	120	0.032	0.81
Miniature gage with side-tab geometry. Matrix size: 0.16L x 0.19W in. (4.1L x 4.8W mm)				
<b>045AL</b> 	EA, <b>SA</b>	350	0.045	1.14
Miniature high-resistance gage. Matrix size: 0.22L x 0.14W in. (5.6L x 3.6W mm)				
<b>050AH</b> 	EA, ED, EP, <b>SA</b> , <b>SK</b> , <b>SD</b>	120, 350	0.05	1.27
General-purpose miniature gage. Matrix size: 0.23L x 0.14W in. (5.8L x 3.6W mm)				
<b>050AR</b> 	EA, ED, <b>WA</b> , WK, <b>SA</b> , <b>SK</b> , <b>SD</b> , WD	120, 350	0.05	1.27
General-purpose miniature gage with large solder tabs. Matrix size: 0.25L x 0.18W in. (6.4L x 4.6W mm)				
<b>050SB</b> 	EA, ED, <b>WA</b> , WK, EP, <b>SA</b> , <b>SK</b> , <b>SD</b> , WD	120, 350	0.05	1.27
Similar to the 050AH pattern but with solder tabs at side of grid. Matrix size: 0.19L x 0.19W in. (4.8L x 4.8W mm)				

**Note 1:** Products with designations and options shown in bold are not RoHS compliant.

See [www.vishay.com/strain-gages](http://www.vishay.com/strain-gages) for complete specifications.





## **ANALYSE FINE DU MECANISME D'INTERACTION DANS LES STRUCTURES SOUPLES ASSEMBLEES PAR COLLAGE**

Ce document présente une amélioration des approches existantes pour la détermination des contraintes qui résultent du mécanisme d'interaction dans les assemblages collés soumis à de la flexion ou du flambage. Pour ce faire, une solution analytique a été développée pour calculer les contraintes de cisaillement et de pelage au sein de l'adhésif. La méthode est basée sur une description précise des équations cinématiques au sein d'un composant renforcé. Les effets du second ordre dus à la flexion de l'assemblage sont pris en compte par le biais de la courbure. La déformation transverse au sein de l'adhésif due à la différence de courbure des adhérents est considérée. Les équations qui gouvernent le mécanisme d'interaction sont établies sous la forme d'un système différentiel couplé, dont les inconnues sont la contrainte de cisaillement et la contrainte de pelage dans l'adhésif. L'interaction entre les deux contraintes est prise en compte lors de la résolution.

**MOTS CLES :** A. Assemblages collés ; B. Flambage ; C. Formulation analytique ; D. Flexion ; E. Contraintes d'interaction

## **A CLOSED FORM SOLUTION FOR INTERFACIAL STRESSES IN BONDED SLENDER STRUCTURES**

An improved method is presented for the analysis of the shear and peel stresses in adhesively-bonded joints in structures subjected to bending and buckling. The method is based on a precise description of the kinematics equations in a beam cross-section. Second order effects due to the slenderness of the member as well as transverse deformation in the adhesive joint due to differential curvature between the two adherends are taken into account. Governing equations for the interfacial stresses are established in the form of two coupled differential equations in terms of the shear and peel stresses in the adhesive joint. This interaction is taken into account. A general solution for these two equations is proposed, which yields two fully coupled closed form equations for the stresses. These general equations may be adapted to any particular configuration by means of appropriate boundary conditions.

**KEYWORDS:** A. Bonded structures ; B. Buckling ; C. Closed form solution ; D. Bending ; E. Interfacial stresses